Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Брянский городской лицей №2 им. М.В. Ломоносова»

ПРОЕКТНАЯ РАБОТА

**«ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТЬ»**

 Математика

*Выполнил* ученик 10 «Б» класса

Цыганков Матвей

*Научный руководитель:*

Самойлова Ирина Николаевна

учитель математики

Брянск 2020

Содержание:

1. Введение…………………………………………………………………3
2. Основная часть…………………………………………………………4
	1. Теоретическая часть…………..…………………………………4
	2. Практическая часть……………….……………………………12
	3. Задачи обязательного уровня………………………12
	4. Олимпиадные задачи…………………………………15
3. Заключение…..………………………………………………………………19
4. Список литературы…………………………………………………………20
5. Приложение…………………………………………………………………21

Введение

**Тема работы -** «Задачи на делимость».

**Цель:** Создать сборник задач по теме «Делимость».

**Задачи:**

1. Повторить признаки делимости;
2. Подобрать задачи на применение признаков делимости;
3. Систематизировать задачи по типам (приёмам);
4. Научиться решать задачи на делимость.

Вопросы делимости одних целых чисел на другие рассматриваются в разделе математики под названием «Теория чисел».

 Английский математик Г. Х. Харди (1877 – 1947) полагал, что элементарная теория чисел является одним из лучших предметов для первоначального математического образования: она требует очень мало предварительных знаний (в основном арифметических); методы рассуждений, применяемые ею, просты, общи, немногочисленны; среди математических наук нет равной ей в обращении к естественной человеческой любознательности.

 Теория чисел даёт примеры простых и точных доказательств идеальной строгости, формирует математическое мышление и способствует приобретению навыков, полезных для изучения любого раздела математики.

 Практически при любом достаточно глубоком математическом исследовании приходится сталкиваться со сравнительно простыми теоретико-числовыми фактами. Отдельные положения теории чисел находят применения на практике: в теории телефонных сетей, в криптографии (тайнопись, кодирование), в теории приближённых вычислений, в физике и биологии.

Основная часть

* 1. **Теоретическая часть**

**Понятие делимости. Делимость суммы и произведения.**

Целое число a делится на натуральное число, если существует целое число p, такое, что a=mp.

Число m называют делителем числа a, а число p – частным от деления a на m.

Два натуральных числа называются взаимно простыми, если среди натуральных чисел они не имеют никаких общих делителей, кроме единицы.

Наибольшее из натуральных чисел, являющихся одновременно делителями натуральных чисел a и b, называют наибольшим общим делителем (НОД) чисел a и b.

Числа a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда их НОД равен 1.

Свойства делимости суммы, разности и произведения чисел (a, b – целые числа; m, n, k, l – натуральные числа).

1. Если a делится на m и b делится на m, то числа a + b и a - b также делятся на m.
2. Если a и b делятся на m, то при любых k и l число ka + lb делится на m.
3. Если a делится на m, а b не делится на m, то числа a + b и a – b не делятся на m.
4. Если a делится на m, а m делится на k, то a делится на k.
5. Если a делится на m, а b делится на n, то ab делится на mn.
6. Если число a делится на каждое из чисел m, n, причём m, n – взаимно простые числа, то a делится на их произведение mn.
7. Если a делится на m, то ak делится на mk.

Если целые числа a и b делятся на натуральное число m, то существуют такие целые числа p и q, что a=mp, b=mq, откуда получаем a + b = m (p – q), a – b = m (p - q).

Так как p + q – целое число, p – q – целое число, то числа a + b и a – b делятся на m.

Целое число, делящееся на 2, называют чётным, а целое число, не делящееся на 2, называют нечётным. Чётное число a можно записать в виде a = 2k, а нечётное число a – в виде a = 2k – 1, где k – некоторое целое число.

Задача 1. Доказать, что квадрат чётного числа делится на 4, а квадрат нечётного числа имеет вид 4p + 1, где p ∈ Z.

а) Пусть a – чётное число, тогда a = 2k, где k ∈ Z ⇒ a = 2k ⎪ ()2, a2 = (2k) 2, a2 = 4k2, где k2 – натуральное число или 0 ⇒ 4k делится на 4 ⇒ a2 делится на 4.

б) Пусть a – нечётное число, тогда a = 2k – 1, откуда следует, что a = 2k – 1 ⎪ ()2, a2 = (2k – 1) 2, a2 = 4k2 – 4k + 1 = 4(k2 – k) + 1, где k2 – k = p – целое число, т. к. k ∈ Z, т. е. a2 = 4p + 1.

Задача 2. Доказать, что числа a = 1610 – 235 делится на 31.

Т. к. 1610 = 240, то a = 240 – 235 = 235(25 – 1) = 31 ⋅ 235, откуда следует, что a делится на 31.

Задача 3. Натуральные числа 8n + 3 и 5n + 1 делятся на натуральное число m ≠ 1. Найти m.

Т. к. числа 8n + 3 и 5n + 1 делятся на m, то (по 2 свойству) и число 5(8n + 3) – 8(5n + 1) = 7 должно делиться на m. Но единственное натуральное число, не равное 1, на которое делится 7, равно 7.

Ответ: m = 7.

Задача 4. Пусть x и y – такие натуральные числа, что число 5x + 7y делится на 13. Доказать, что число a = 46x + 41y делится на 13.

Воспользуемся неравенством a = 46x + 41y = 4(5x + 7y) + 13(2x + y). Число 4(5x + 7y) делится на 13, так как 5x + 7y по условию делится на 13. Число 13(2x + y) также делится на 13 при любых натуральных x и y ⇒ число a делится на 13.

Задача 5. 1) {x, y} - чётные (нечётные) ⇒ $\left\{\begin{array}{c}3x – чётное число\\5y – чётное число\end{array}\right.$ ⇒ (3x + 5y + 2) – чётное число, т. е. (3x + 5y + 2) = 2k, k ∈ N. (2k) 4 = 24k4 = 16k4 делится на 16 ⇒ (3x + 5y + 2) делится на 16.

2) $\left\{\begin{array}{c}x – чётное (нечётное) число\\y – нечётное (чётное) число\end{array}\right.$ ⇒ 3y – нечётное ⇒ (x (чётное) + 3y (нечётное) – 5 (нечётное)) – чётное, т. е. (x + 3y – 5) = 2n, n ∈ N. (2n)5 = 25n5 делится на 16, т. к. 25 = 24 ⋅ 2 = 16 ⋅ 2 делится на 16 ⇒ (x + 3y – 5) делится на 16.

**Деление с остатком.**

Не всякое натуральное число a делится на данное натуральное число m.

Например, число 28 не делится на 3, а результат деления можно записать с помощью равенства 28 = 3 ⋅ 9 + 1, где 9 – частное, 1 – остаток.

Аналогично делению натурального числа a на натуральное число m соответствует равенство (1)

a = qm + r

, где q – целое неотрицательное число, r принимает одно из значений 0, 1, 2, …, m – 1. Для любого целого числа a деление на натуральное число m определяется равенством (1), в котором q ∈ Z, r – неотрицательное целое число, такое, что 0 ≤ r < m.

Например, если a = -37, m = 5, то -37 = (-8) ⋅ 5 + 3.

Задача 1. Найти остаток от деления числа a = 10 ⋅ 525 на 4.

Т. к. 525 оканчивается цифрой 5 ⇒ две последние цифры числа a образуют число 50. Остаток от деления числа a на 4 равен остатку от деления числа 50 на 4, т. е. равен 2.

Задача 2. Найти остаток от деления числа 927 на 13.

При делении на 13 числа 92 остаток равен 1, т. е. 92 = 13 ⋅ 7 + 1.

При делении числа 922 остаток также равен 1, т. к. 922 = (13 ⋅ 7 + 1) 2 = 132 ⋅ 72 + 2 ⋅ 13 ⋅ 7 + 1 = 13(13 ⋅ 72 + 2 ⋅ 7) + 1 = 13k + 1, k ∈ N.

Аналогично 923 = 92 ⋅ 922 = (13 ⋅ 7 + 1)(13k + 1) = 13p + 1, p ∈ N; 924 = 13q + 1, q ∈ N; 927 = 923 ⋅ 924 = (13p + 1)(13q + 1) = 13r + 1, где r ∈ N ⇒ Остаток от деления 927 на 13 равен 1.

Задача 3. Доказать, что если натуральное число a не делится на 3, то a2 = 3p + 1, где p ∈ N.

Пусть a не делится на 3 ⇒ остаток r от деления a на 3 равен 1 или 2. Если r = 1, то a = 3m + 1, где m ∈ N, откуда a2 = 9m2 + 6m + 1 = 3(3m2 + 2m) + 1 = 3p + 1, где p = 3m2 + 2m – натуральное число.

Если r = 2, то a = 3m + 2 = 3(m + 1) – 1 = 3k – 1, где k = m + 1 – натуральное число.

Отсюда a2 = (3k – 1)2 = 3(3k2 – 2k) + 1 = 3p + 1, где p = 3k2 – 2k – натуральное число.

Задача 4. Доказать, что число n3 + 5n делится на 6 при любом n ∈ N.

Пусть n > 1. Воспользуемся равенством n3 + 5n = n3 – n + 6n = (n – 1)n(n + 1) + 6n.

Т. к. 6n делится на 6, то достаточно сказать, что A = (n – 1)n(n + 1) (т. е. произведение 3-ёх последовательных натуральных чисел) делится на 6.

Среди чисел n – 1, n, n + 1 по крайней мере одно делится на 2, и поэтому A делится на 2.

Кроме того, одно из трёх чисел делится на 3 ⇒ A делится на 6.

Задача 5. Найти последнюю цифру числа a, если:

1. a = 2387; 2) a = 3275; 3) a = 7358.

Задачу можно сформулировать иначе: найти остаток от деления числа a на 10.

1. Выпишем последовательные степени двойки:

21 = 2, 22 = 4, 23 = 8, 24 = 16, 25 = 32, 26 = 64 и т. д.

Последние цифры этих чисел повторяются через 4 ⇒ последняя цифра числа 2k, где k ∈ N, определяется только тем, каков остаток от деления числа k на 4.

Из равенства 387 = 384 + 3, где число 384 делится на 4, следует, что остаток от деления числа 387 на 4 равен 3 ⇒ последняя цифра числа – 8 (23 = 8). Вообще если a = 2k, где k ∈ N, а при делении числа k на 4 получается остаток, равный r, где r = 1, 2, 3, то последняя цифра числа 2k совпадает с последней цифрой числа 2r. Если число k делится на 4 (в этом случае r = 0), то последняя цифра числа 2k – 6, т. к. 24 оканчивается цифрой 6.

1. Выпишем последовательные степени тройки:

31 = 3, 32 = 9, 33 = 27, 34 = 81, 35 = 243, 36 = 729 и т. д.

Последние цифры степеней тройки повторяются через 4.

Из равенства 275 = 272 + 3, где 272 делится на 4, следует, что 7 – последняя цифра a, т. к. 33 оканчивается цифрой 7.

1. Числа 7 k при k = 1, 2, 3, 4, 5 оканчиваются соответственно цифрами 7, 9, 3, 1, 7. Таким образом, последние цифры чисел 7 k повторяются через 4. Т. к. 358 = 356 + 2, где число 356 делится на 4, то последняя цифра числа такая же, как и у числа 72, - это цифра 9.

Задача 6. Найти все целые n, при которых дробь a = $\frac{n^{5} + 3}{n^{2}+1}$ – целое число.

Представим a в виде суммы многочлена и дроби, числитель которой – многочлен первой степени. С этой целью запишем a в следующем виде: a = $\frac{\left(n^{5} + n^{3}\right) - \left(n^{3} + n\right) + n + 3}{n^{2} + 1}$.

Произведя деление, получим a = n3 – n + $\frac{n + 3}{n^{2} + 1}$.

Т. к. n3 – n – целое число, то a – целое число тогда и только тогда, когда дробь $\frac{n + 3}{n^{2} + 1}$ – целое число. Этому условию удовлетворяют только целые числа -3, -1, 0, 1, 2.

**Признаки делимости.**

Признаки делимости на 11, 10, 9, 5, 4 и 3:

1. Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0.
2. Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 или 5.
3. Натуральное число n > 9 делится на 4 тогда и только тогда, когда двузначное число, полученное из данного отбрасыванием всех цифр, коме двух последних, делится на 4.

Например, число 273652 делится на 4, т. к. 52 делится на 4, а число 37826 не делится на 4, т. к. 26 не делится на 4.

Переходя к признакам делимости на 9 и 3, напомним, что любое натуральное число можно представить суммой слагаемых вида ak ⋅ 10k, где ak – цифра k-го разряда числа a.

Например, 8345 = 5 + 4 ⋅ 10 + 3 ⋅ 102 + 8 ⋅ 103.

Если натуральное число a является n–значным, то a = an – 1an – 2 … a2a1a0 = a0 + 10 ⋅ a1 + 102 ⋅ a2 + … + 10n – 1 ⋅ an – 1.

Задача 1. Доказать, что натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Доказательство: Пусть число a имеет вид a = an – 1an – 2 … a2a1a0 = a0 + 10 ⋅ a1 + 102 ⋅ a2 + … + 10n – 1 ⋅ an – 1, S = a0 + a1 + … + an – 1 – сумма его цифр. Тогда a – S = a0 + 10 ⋅ a1 + 102 ⋅ a2 + … + 10n – 1 ⋅ an – 1 – (a0 + a1 + a2 + … + an – 1) = 9a1 + 99a2 + … + (10n – 1 – 1)an – 1.

Т. к. числа 9, 99, 999, …, 10n – 1 – 1 составлены из одних девяток, то эти числа делятся на 9. Тогда из неравенства a – S = a0 + 10 ⋅ a1 + 102 ⋅ a2 + … + 10n – 1 ⋅ an – 1 – (a0 + a1 + a2 + … + an – 1) = 9a1 + 99a2 + … + (10n – 1 – 1)an – 1 следует, что если число a делится на 9, то и S делится на 9 (согласно 1 свойству из §1).

Верно и обратное: из делимости суммы S на 9 следует делимость числа a на 9.

Задача 2. Доказать, что натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

Доказательство: Воспользуемся обозначениями предыдущей задачи.

Если S делится на 3, то a также делится на 3, т. к. разность a – S, делящаяся на 9, делится и на 3. Обратно: из того, что a делится на 3, следует, что и S также делится на 3, т. к. a – S делится на 3.

Задача 3. Доказать, что число a = 1233 + 5674 делится на 3.

Доказательство: Каждое из чисел 123 и 567 делится на 3, т. к. сумма цифр каждого делится на 3 ⇒ числа 1233 и 5674 делятся на 3, откуда следует, что число a делится на 3.

Задача 4. Натуральное число p = $\overline{abc}$, где a, b, c – цифры соответствующих разрядов, делится на 37. Доказать, что и число q = $\overline{bca}$ также делится на 37.

Доказательство: Т. к. p делится на 37, то p = 100a + 10b + c = 37k, где k – целое число ⇒ q = 100b + 10c + a = 10p – 999a. Число 999 делится на 37, т. к. 999 делится на 11, а число 111 делится на 37 ⇒ число q делится на 37 как разность двух чисел, каждое из которых делится на 37.

Задача 5. Доказать, что число a = 1025 + 1017 – 182 делится на 18.

Доказательство: Число a делится на 2, т. к. каждое из чисел 1025, 1017, 182 является чётным. Докажем, что число a делится на 9. Запишем это число в следующем виде: a = 1025 – 1 + 1017 – 1 – 180.

Числа 1025 – 1, 1017 – 1 и 180 делится на 9, откуда следует, что a делится на 9 ⇒ число a делится на взаимно простые числа 2 и 9 и поэтому оно делится на 18.

Задача 6. Доказать, что число a = 106 + 108 – 200 делится на 198.

Доказательство: Т. к. 198 = 2 ⋅ 9 ⋅ 11, то достаточно доказать, что число a делится на 2, 9 и 11. Запишем число a в виде 106 – 1 + 108 – 1 – 198.

Числа 106 – 1 и 108 – 1 делятся не только на 9, но и на 11, т. к. в записи каждого из них содержится только цифра 9, и притом чётное число раз (6 и 8). Число 198 также делится на 9 и 11. Поэтому числа a делятся на 9 и 11. Кроме того, a делится на 2 ⇒ a делится на 198.

Число кратно 11 тогда и только тогда, когда его знакопеременная сумма цифр кратная 11.

Определение. Два числа называются взаимно простыми, если их общим делителем является только 1.

Теорема о взаимно простых делителях. Если число n делится на каждое из двух взаимно простых чисел a и b, то оно делится и на их произведение ab.

* 1. **Практическая часть**

2.1 **Задачи обязательного уровня**

№236

Доказать, что число 1620 + 276 делится на 17.

Доказательство: Т. к. 1620 = 280, то a = 280 + 276 = 276(24 + 1) = 276 ⋅ 17 ⇒ a делится на 17.

№235

 а) Пусть a – чётное ⇒ a = 2k, k ∈ Z.

 a3 = (2k)3 = 8k3, k3 ∈ Z ⇒ a3 делится на 8.

 б) Пусть a, b – нечётные ⇒ a = 2k – 1, b = 2n – 1; k, n ∈ Z ⇒ a2 - b2 = (2k – 1)2 – (2n – 1)2 = 4k2 – 4k + 1 – 4n2 + 4n – 1 = 4(k – n)(k – n – 1).

 Доказать: (k – n)(k – n – 1) делится на 2.

 Доказательство: Пусть k и n – чётные ⇒ k = 2k1 , n = 2n1 ⇒ k – n = 2k1 - 2n1 = 2(k1 - n1) делится на 2.

 Пусть k – чётное, n – нечётное ⇒ k = 2k1 , n = 2n1 – 1 ⇒ k – n – 1 = 2k1 - 2n1 + 1 – 1 = 2(k1 - n1) делится на 2.

 Пусть k – нечётное, n – чётное ⇒ k - 2k1 - 1, n = 2n1 ⇒ 2k1 - 2n1 - 1 – 1 = 2(k – n – 1) делится на 2.

 Пусть k и n – нечётные ⇒ k = 2k1 – 1, n = 2n1 – 1 ⇒ k – n = 2k1 - 2n1 + 1 – 1 = 2(k1 - n1) делится на 2.

 ⇒ a2 - b2 делится на 8 – что и требовалось доказать.

№238

1. Воспользуемся равенством: a = 57x + 78y = 5(7x + 9y) + 11(2x + 3y)

5(7x + 9y) делится на 11, т. к. 7x + 9y делится на 11 (по условию)

11(2x + 3y) делится на 11, т. к. 11 ∈ N

 ⇒ a делится на 11

1. m + n делится на 7 ⇒ m + n = 7a, где a ∈ N ⇒ 2m2 + 5mn + 3n2 = 2m2 + 5m(7a – m) + 3(7a – m)2 = 2m2 + 35am - 5m2 + 147a2 – 42am + 3m2 = 147a2 – 7am

147a2 делится на 7; 7am делится на 7 ⇒ 2m2 + 5mn + 3n2 делится на 7.

№239

 555777 + 777555 = (5777 ⋅ 111777 + 7555 ⋅ 111555) = 111555(5777 ⋅ 11222 + 7555)

 37 ⋅ 3 = 111 ⇒ 111555 делится на 37 ⇒ 555777 + 777555 делится на 37.

№243

1. При делении на 5 числа 39 остаток равен 4, т. е. 39 = 7 ⋅ 5 + 4 ⇒ 3946 = 5k + 446, 446 = 1623

При делении на 5 числа 16 остаток равен 1, т. е. 16 = 3 ⋅ 5 + 1 ⇒ 1623

= 5k + 1 ⇒ остаток от деления 3946 на 5 равен 1.

1. При делении на 7 числа 64 остаток равен 1, т. е. 64 = 7 ⋅ 9 + 1 ⇒ 6429 = 7k + 1 ⇒ остаток от деления 6429 на 7 равен 1.
2. При делении на 17 числа 103 остаток равен 1; 103 = 17 ⋅ 6 + 1 ⇒ 10315 = 17k + 1 ⇒ 17k + 1 ⇒ остаток от деления 10315 на 17 равен 1.
3. 1010 + 283 – 1 = (9 + 1)10 + (3 ⋅ 9 + 1)3 – 1 = 9k + 1 + 9n + 1 – 1 = 9(k + n) + 1 ⇒ остаток от деления 1010 + 283 – 1 на 3 равен 1.
4. 7 ⋅ 1030 = 7 ⋅ (9 + 1)30 = 7(9k + 1) = 9 ⋅ 7k + 7 ⇒ остаток от деления 7 ⋅ 1030 на 9 равен 7.

№244

 1239 + 1341 = (10 + 2)39 + (10 + 3)41 = 10k + 239 + 10n + 341, k, n ∈ N

 21 = 2; 22 = 4; 23 = 8; 24 = 16; 25 = 32; 26 = 64 и т. д.

 Последние цифры этих чисел повторяются через 4 ⇒ последняя цифра числа 2m, где m ∈ N, определяется только тем, каков остаток от деления числа k на 4.

 Из равенства 39 = 9 ⋅ 4 + 3 ⇒ остаток от деления числа 39 на 4 равен 3 ⇒ остаток от деления 239 на 10 ⇒ 23 = 8.

 31 = 3; 32 = 9; 33 = 27; 34 = 81; 35 = 243; 36 = 729 и т. д.

 Последние цифры степени 3 повторяются через 4.

 Из равенства 41 = 4 ⋅ 10 + 1, следует, что 3 – последняя цифра.

 341, т. к. 31 = 3 ⇒ оканчивается цифрой 3.

 Остаётся, сложить остатки от деления 239 и 341 ⇒ 8 + 3 = 11 ⇒ последняя цифра числа 1239 + 1341 равна 1.

 Ответ: 1.

№245

 3624 + 2145 + 78 = (3 ⋅ 10 + 6)24 + (2 ⋅ 10 + 1)45 + 78 = 10n + 624 + 145 + 78, где n ∈ N.

61 = 6; 62 = 36; 63 = 216; 64 = 1296 и т. д.

⇒ последняя цифра 6k, k ∈ N равна 6 ⇒ остаток от деления 624 на 10 равен 6.

 70 = 1; 71 = 7; 72 = 49; 73 = 243; 74 = 2401; 75 = 16807; 76 = 117649 ⇒ числа 7k оканчиваются цифрами 7; 9; 3; 1.

 ⇒ последние цифры чисел 7 повторяются через 4; т. к. 8 = 4 ⋅ 2 + 0 ⇒ последняя цифра числа такая же, как и у числа 70 = 1 ⇒ 1.

 Сложим остатки от деления 624, 78 и число 1 : 6 + 1 + 1 = 8 ⇒ остаток от деления числа 3624 + 2145 + 78 равен 8.

 Ответ: 8.

№246

 Пусть n не делится на 3 ⇒ остаток от деления n на 3 равен 1 или 2. Если r = 1, то n = 3m + 1, где m ∈ N, откуда n2 = (3m + 1)2 = 9m2 + 6m + 1 = 3(3m2 + 2m) + 1 = 3p1 + 1, где p1 = 3m2 + 2m – натуральное число ⇒ n2 – 1 = 3p1 делится на 3 ⇒ n2 – 1 делится на 3.

 Если r = 2, то n = 3m + 2 = 3(m + 1) – 1 = 3k – 1, где k = m + 1 – натуральное число. Отсюда n2 = (3k - 1)2 = 3(3k2 – 2k) + 1 = 3p2 + 1, где p2 = 3k2 – 2k – натуральное число ⇒ n2 – 1 = 3p2 делится на 3 ⇒ n2 – 1 делится на 3, где p2 ∈ N.

2.2 **Олимпиадные** **задачи**

№1.3.

 Определите, не выполняя действий, делится ли: а) 182 - 72 на 11; б) 453 + 553 на 2500; в) 13 + 23 + … + 823 на 83.

 Решение: а) 182 - 72 = (разность квадратов) (18 – 7)(18 + 7) = 11 ⋅ 25 ⇒ (182 - 72) делится на 11.

 б) 453 + 553 = (сумма кубов) (45 + 55)(452 – 45 ⋅ 55 + 552) = 100 ⋅ (92 ⋅ 52 – 9 ⋅ 5 ⋅ 5 ⋅ 11 + 52 ⋅ 112) ⇒ 100 делится на 100; 92 ⋅ 52 – 9 ⋅ 52 ⋅ 11 + 52 ⋅ 112 = 52(92 – 99 + 112) делится на 25 ⇒ (453 + 553) делится на 2500.

 в) 13 + 23 + 33 + … + 803 + 813 + 823 = (сгруппируем по парам) (13 + 823) + (23 + 813) + (33 + 803) + … (413 + 423):

 1) (13 + 823) = (1 + 82)(12 – 1 ⋅ 82 + 822) = 83 (12 – 1 ⋅ 82 + 822) делится на 83;

 2) (23 + 813) = (2 + 81)(22 – 2 ⋅ 81 + 812) = 83 (22 – 2 ⋅ 81 + 812) делится на 83;

 3) (33 + 803) = (3 + 80)(32 – 3 ⋅ 80 + 802) = 83 (32 – 3 ⋅ 80 + 802) делится на 83;

 4) (413 + 423) = (41 + 42)(412 – 41 ⋅ 42 + 422) = 83 (412 – 41 ⋅ 42 + 422) делится на 83;

 Из всех пар можно вынести 83 ⇒ 13 + 23 + … + 823 делится на 83.

№1.4.

 Петя считает, что если a2 делится на (a – b), то b2 делится на (a – b). Прав ли он?

 a2 - b2 = (a – b)(a + b) делится на (a – b).

 Получим: a2 - b2 делится на (a – b); a2 делится на (a – b) (по условию) ⇒ b2 делится на (a – b).

№1.5.

 n ∈ N; m2 = n.

 Например: Делители n, d;

 $\left(\begin{array}{c}2\\2\\2\\3\end{array}\right)$

 D(24): $\left\{1;2;4;3;6;8;12;24\right\}-a$

 242 $\left\{a;\begin{matrix}их квадраты\\1;4;16;9;36;64;144;576 \end{matrix}\right\}-d$

 $\left(d; \frac{n}{d}\right): \frac{576}{1}=576; \frac{576}{4}=144; \frac{576}{16}=36; \frac{576}{9}=64; \frac{576}{36}=16; \frac{576}{64}=9; \frac{576}{144}=4; \frac{576}{576}=1.$

 $\frac{m}{n}= \frac{1^{2}}{1}; \frac{2^{2}}{2}; \frac{4^{2}}{4}; \frac{3^{2}}{3}; \frac{6^{2}}{6}; \frac{8^{2}}{8}; \frac{12^{2}}{12}; \frac{24^{2}}{24}$

 (m; m) ⇒ для m нет парного.

№1.10.

 В Тройном королевстве имеют хождение только монеты по 9 и по 15 золотых. Докажите, что такими монетами нельзя набрать сумму в 50 золотых.

 9 делится на 3; 15 делится на 3 ⇒ (9 + 15) делится на 3 ⇒ любая сумма из монет по 9 и 15 делится на 3, но 50 не делится на 3 ⇒ монетами по 9 и по 15 набрать сумму в 50 золотых нельзя.

№1.12.

 100 камер.

1. 1 поворот – открыты все двери.
2. 2 поворот – по чётным камерам закрыты двери, нечётные открыты ⇒ 1 камера открыта.
3. 3 поворот – кратные 3 = $\left\{1;3\right\}$

 чётные нечётные

 открыты закрыты

1. D4 = $\left\{1;2;4\right\}$

D1 = $\left\{1\right\}$ – 1 к.

D2 = $\left\{1;2\right\}$

D3 = $\left\{1;3\right\}$

D4 = $\left\{1;2;4\right\}$

D5 = $\left\{1;5\right\}$

D6 = $\left\{1;2;3;6\right\}$

D7 = $\left\{1;7\right\}$

См. Приложение 1

 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100.

 Ответ: 10.

№2.6.

 В числе 65432789 вычеркните наименьшее количество цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 36.

 Пусть 65432789 = x, x делится на 36.

 делится на 9 ⇒ сумма цифр числа делится на 9

x делится на 36 делится на 2 – чётное ⇒ ~~9~~

 делится на 4 ⇒ последние 2 цифры в числе $\overbar{ab}$ делится на 4 ⇒ ~~7~~ ⇒ осталось 28.

 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 8 = 28 ⇒ 27 (-1) ⇒18 (-10 = 6 + 4) ⇒ ~~6~~; ~~4~~

 Получим: 5328 делится на 36.

№2.9.

 В числе поменяли местами некоторые цифры и получили число, в три раза большее исходного. Докажите, что полученное число делится на 27.

 $\overbar{abc}$ → $3\overbar{abc}\vdots 27$ $\vdots 3$

 $\vdots 9$

 $\vdots 27$ → $\left\{54;81;108;135\right\}$

 Число не может быть двузначным, т. к. первое двузначное число, которое делится на 27 → 54

 Число делится на 27 и оно в 3 раза больше ⇒ начальное число делится на (27 : 3) = 9 ⇒ сумма цифр числа делится на 9 ⇒ $3\overbar{abc}\vdots 27$.

№2.11.

 Швондер придумал ребус, в котором фигурируют числа ГЛАВРЫБААБЫРВАЛГ и БОРМЕНТАЛЬ. Профессор Преображенский утверждает, что оба этих числа – составные. Прав ли профессор?

 главрыбаабырвалг

(г + а + р + б + а + ы + в + л) - (г + а + р + б + а + ы + в + л) = 0 ⇒ $\vdots 11$

 БОРМЕНТАЛЬ – 10 цифр.

 0 + 1 + 2 + 3 + … + 9 = 45 $\vdots $ 3 ($\vdots 9)$

№3.2.

 Какой остаток даёт число 123321 при делении на 999?

 123321 = (кол-во тысяч)(1000 ⋅ 123) + 321 = (заберём от каждой тысячи по 1 → до 999)(999 ⋅ 123) + (забрали по 1)(123 + 321) = 999 ⋅ 123 $\vdots $ 999 + 444 $\vdots $999. Остаток 444.

Заключение

 Итак, в процессе работы я узнал, что еще в древние времена люди задумывались над этим вопросом.  С помощью дополнительной литературы нашел различные признаки делимости, которые не проходят по школьной программе. Мне удалось найти задачи по теме моей исследовательской работе и решить их. Собранный материал я систематизировал и оформил. Данный материал может быть использован при подготовке к олимпиадам, ЕГЭ. Учителя математики также могут использовать этот материал для изучения этой темы. Рекомендую ознакомиться с моей работой сверстникам, которые хотят знать о математике больше.

Список литературы:

 1. Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин. «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия», 6-е издание, Москва «Просвещение» 2019.

 2. А. И. Сгибнев. «Делимость и простые числа», издание третье, исправленное, Издательство МЦНМО Москва, 2015.

 3. Nsportal.ru, «Алые паруса, проект для одаренных детей», Делимость чисел. Web: <https://nsportal.ru/ap/library/nauchno-tekhnicheskoe-tvorchestvo/2015/09/26/delimost-chisel>

 4. Д. И. Молдаванский. «Целые числа. Основы теории делимости», Факультативный курс, Иваново 2001.

 5. И. Г. Булавко. «Научно-популярный физико-математический журнал "Квант" (издается с января 1970 года)», «Делимость чисел», МЦНМО редакция журнала "Квант" 1974.

 6. В. Абрамович. «Научно-популярный физико-математический журнал "Квант" (издается с января 1970 года)», «Признаки делимости на l», МЦНМО редакция журнала "Квант" 1978.

 7. Воробьев Н. Н. «Признаки делимости». — 4-е изд. — М.: Наука, 1988. — Т. 38. — 94 с. — (Популярные лекции по математике). — ISBN 5-02-013731-6.

 8. Воробьёв Н. Н. Признаки делимости. — 3-е изд. — М.: Наука, 1980.

 9. Гельфанд М. Б., Павлович В. С. Внеклассная работа по математике. М., — «Просвещение», 1985.

Приложение

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1д | 2д | 2д | 3д | 2д | 4д | 2д | 4д | 3д | 4д | 2д | 6д | 2д | 4д | 4д | 5д | 2д | 6д | 2д | 6д |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 4д | 4д | 2д | 8д | 3д | 4д | 4д | 6д | 2д | 8д | 2д | 6д | 4д | 4д | 4д | 9д | 2д | 4д | 4д | 8д |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 2д | 8д | 2д | 6д | 6д | 4д | 2д | 10д | 3д | 6д | 4д | 6д | 2д | 8д | 4д | 8д | 4д | 4д | 2д | 12д |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 2д | 4д | 6д | 7д | 4д | 8д | 2д | 6д | 4д | 8д | 2д | 12д | 2д | 4д | 6д | 6д | 4д | 8д | 2д | 10д |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |
| 5д | 4д | 2д | 12д | 4д | 4д | 4д | 8д | 2д | 12д | 4д | 6д | 4д | 4д | 4д | 12д | 2д | 6д | 6д | 9д |

 Приложение 1

 Приложение 2. Диаграмма знаний о делении с остатком

Приложение 2. Диаграмма знаний о признаке делимости на 11

Приложение 3. Диаграмма умения применять признаки делимости

Приложение 4. Диаграмма умения использования понятия чётности и нечётности в повседневной жизни