

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «КубГУ»)

Филиал в г. Славянске-на-Кубани

КУРСОВАЯ РАБОТА

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

СРЕДНЕЙ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Работу выполнил _____ С.Е. Вихров

Направление подготовки 44.03.05 Педагогическое образование

(с двумя профилями подготовки)

Направленность (профиль): Математика, Информатика, курс 4

Научный руководитель

д-р физ.-мат. наук, профессор _____ **отлично** А.Б. Шишкин

Нормоконтролер

д-р физ.-мат. наук, профессор _____ **нормоконтроль пройден 20.05.20** А.Б. Шишкин

Краснодар

2020

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Теоретические основания определения функций в обучении	
математике	5
1.1 Эволюция функции в математике и в обучении математике ..	5
1.2 Значение и методики изучения логарифмической функции ...	11
1.3 Выводы по первой главе	16
2 Методика использования аксиоматического подхода	
к определению логарифмической функции в курсе математики	
средней	
общеобразовательной школы	18
2.1 Условия использования аксиоматического метода	18
2.2 Примеры уроков с использованием аксиоматического метода.	23
2.3 Выводы по второй главе	29
Заключение	30
Список использованных источников	31

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных линий, реализуемых в школьном курсе математики является функциональная линия. Это связано с тем, что понятие функции является одним из фундаментальных математических понятий. В этом понятии, непосредственно связанным с реальным миром, миром математических абстракций - ярко воплощены изменчивость и динамичность реального мира, взаимная обусловленность реальных объектов, с одной стороны. А с другой в этом понятии сконцентрирован весь опыт исканий математиков, причём представления о функции, как математическом объекте и сегодня получает своё развитие в работах современных математиков. Вместе с развитием понятия «функция» в методике обучения математике формировались различные подходы к введению этого понятия в курс математики средней школы: генетический, логический, аксиоматический и др. Однако, ввиду того, что понятие функции по-прежнему является предметом научного рассмотрения, то есть развивается, то со всей очевидностью становится ясным, что вопросы связанные с введением понятия функции на уроках математики, по-прежнему актуальны и востребованы. Все вышеизложенное определяет **актуальность** данной работы.

Поэтому, **объектом** выступило поле проблем определения элементарных функций на уроках математики в средней общеобразовательной школе, а **предметом** — аксиоматическое определение логарифмической функции на уроках математики средней общеобразовательной школы.

Выявленные объект и предмет работы позволили сформулировать **цель**, которая заключается в исследовании возможности использования аксиоматического определения элементарных функций на уроках математики в средней общеобразовательной школе (на примере логарифмической функции).

Для достижения поставленной цели необходимо решить ряд **задач**:

- изучить теоретические основания определения функций в обучении математике;
- выявить значение, место и методики изучения логарифмической функции;
- выявить методические условия использования аксиоматического

метода при введении понятия функции в средней общеобразовательной школе;

- разработать примерное содержание уроков использования аксиоматического метода при изучении понятия логарифмической функции.

Методологическую основу работы составили:

- методы анализа, сравнения научных и методических текстов по заявленной проблеме;

- метод проектирования при разработке уроков по теме работы.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованных литературных источников. В первой главе представлено теоретическое обоснование определения функций в обучении математике. Во второй – описана методика использования аксиоматического метода в определении логарифмической функции в школьном курсе математики. В заключении прописаны основные результаты, полученные автором в ходе выполнения исследования.

1 Теоретические основания определения функций в обучении математике

1.1 Эволюция функции в математике и в обучении математике

Как отмечалось во введении в математику понятие функции эволюционировало, а вместе с ней получали своё развитие и методические представления этого понятия в школе.

В частности, долгое время понятие функции было в своеобразном плену у формулы [2]. Например, Л. Эйлер под функцией понимал всякое аналитическое выражение [11]. Это определение, удовлетворительное для определённого этапа развития математической науки, по существу ограничивало объём этого понятия и приводило к различным противоречиям. Действительно, это определение ограничивало способ задания функции – только аналитически. При этом, аналитическая запись функции не допускала двух и более аналитических выражений. То есть, в понимании русского математика функция вида

$$y = \begin{cases} x + \cos x, x \leq 0 \\ \ln x, x > 0 \end{cases}$$

Новые представления о функции как о зависимости одной величины от другой в математике как науке, укрепились со времён Н.И. Лобачевского и Л. Дирихле [3]. Такой подход долгое время сохранялся и в школе. Но и здесь возникали определённые затруднения, которые весьма сложно объяснялись. Для примера, Ю.М. Колягин в своих исследованиях по проблемам введения понятия функции, отмечает, что, отодвинув на второй план способ задания функции, при описании понятия функции использовались практически плохо разъясняемые понятия величины, изменения, зависимости [9].

В настоящее время существует несколько вариантов определения функции. Один из вариантов заключается в том, что понятие функции выступает как первичное (неопределяемое) математическое понятие [4, 6]. В другом варианте первичным принимается понятие отображения. В этом

направлении под функцией понимается отображение одного числового множества в другое. Следующий вариант трактовки понятия функции выглядит как особое отношение, установленное между элементами множеств [9]. И, наконец, функция может быть определена как некоторое соответствие между элементами множеств [10].

В школьные программы понятие функции включено относительно недавно, под существенным влиянием идей известного педагога математика Ф. Клейна. По мнению Ф. Клейна, понятие функции должно быть не только ведущим понятием в математике как науке, но и ведущим понятием в обучении математике [7]. Как и в науке, в школьном курсе математике понятие функции также претерпело свой путь развития. В результате такой эволюции функциональная линия в обучении математике стала одной из ведущих линий школьного курса математики. Наиболее существенной особенностью материала этой линии заключается в том, что средствами этого материала можно устанавливать разнообразные связи содержательного наполнения учебного материала в ходе обучения. При этом, в теории и практике обучения математике сформировались два основных подхода к введению понятия функции значительно различающихся по своему методическому наполнению: *генетический* и *логический*. Рассмотрим эти трактовки.

Методическая трактовка понятия функции (генетическая) имеет своим основанием те характеристики и черты понятия функции, которые существовали до середины 19 века в математике, как науке. Обратив внимание на Рисунок 1, можно заметить, что основными понятиями, которые входят в функциональные представления в этой трактовке являются: переменная величина, функциональная зависимость переменных величин, формула, средствами которой выражаются комбинации других переменных величин и декартова система координат [3].

С методической точки зрения, генетическое развёртывание понятия функции имеет ряд достоинств и недостатков. К достоинствам такого подхода можно отнести то, что в нём контекстно подчёркивается динамический характер понятия функциональной зависимости на основе которого, практически сразу, можно выделить модельный ряд функциональной за-



Рисунок 1 – Схематическое представление содержания понятия функции при генетическом подходе

висимости. В этой ситуации, поскольку большая часть функций школьного курса математики выражаются аналитически или с помощью таблиц, то такую трактовку понятия функции достаточно просто связать с другими разделами курса алгебры и начал анализа, изучаемых в школе. В частности, в школьном курсе математики, в рамках содержательных линий: «Системы уравнений и неравенств», «Координатный метод», «Преобразования графиков функций», «Производная функции» и др. наряду с собственным математическим содержанием, входящим в тему, изучаются различные приложения, связанные с использованием понятия функции и их свойств. Рассмотрим примеры такой интеграции понятия функции с содержанием некоторых тем курса математики. Например, при исследовании системы линейных уравнений с двумя неизвестными, наряду с аналитическим методом, вполне логично выглядит использование координатного метода. Для примера, исследование системы линейных уравнений с параметром

$$\begin{cases} a_{11}x + b_{12}y = c_1 \\ a_{21}x + b_{22}y = c_2 \end{cases}$$

заменяют исследованием взаимного расположения графиков двух функций в декартовой системе координат: при $b_{12} \neq 0; b_{22} \neq 0$

$$\begin{cases} y = -\frac{a_{11}}{b_{12}}x + \frac{c_1}{b_{12}} \\ y = -\frac{a_{21}}{b_{22}}x + \frac{c_2}{b_{22}} \end{cases}$$

Если коэффициенты при переменной x (угловые коэффициенты) и свободные члены уравнений двух прямых равны, то такая система имеет бесконечно много решений. То есть, если выполняются условия:

$$\frac{a_{11}}{b_{12}} = \frac{a_{21}}{b_{22}}$$

и

$$\frac{c_1}{b_{12}} = \frac{c_2}{b_{22}},$$

то система уравнений имеет бесконечно много решений, выраженных парой чисел

$$(x; -\frac{a_{11}}{b_{12}}x + \frac{c_1}{b_{12}}).$$

Такая интерпретация имеет простой геометрический смысл: записанные условия, являются условием расположения двух совпадающих прямых на плоскости. Если коэффициенты при переменной x (угловые коэффициенты) равны, но не равны свободные члены уравнений двух прямых, то такие прямые параллельны. Если же угловые коэффициенты при переменной x (угловые коэффициенты) уравнений двух прямых не равны, то такие прямые пересекаются, и поэтому система уравнений имеет одно решение. К отрицательным моментам генетического представления понятия функции, является то, что что переменная при таком подходе всегда неявно (или даже явно) предполагается пробегающей непрерывный ряд числовых значений. Поэтому в значительной степени понятие связывается только с числовыми функциями одного числового аргумента (определенными на числовых промежутках). В обучении приходится, используя и развивая функциональные представления, постоянно выходить за пределы его первоначального описания. Например, выработанное понятие функции на основе генетического подхода, в основном связывается только с числовыми и функциями одного числового аргумента. Хотя и этот фактор, в старшей школе, практически стирается, потому как в 10—11-х классах изучаются

конкретно заданные функции и их классы, разнообразие и приложения изученных функций в решении математических задач и задач прикладного характера. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Задача 1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + \sin x = y + \sin y \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(t) = t + \sin t, t \in R$. Поскольку $f'(t) = 1 + \cos t \geq 0$, то очевидно, что функция возрастает. Но тогда по свойству монотонной, непрерывной функции можно утверждать, что на своей естественной области определения все свои значения функция $f(t)$ принимает один раз. Отсюда следует, что $x = y$. Но тогда имеет место система уравнений

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

. Решая эту систему, получим:

$$\begin{cases} x = y \\ 3x^2 = 12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Записывая решение в виде пары чисел, получим ответ: $(-2; 2), (2, 2)$.

Логическая трактовка понятия функции исходит из положения о том, что строить обучение функциональным представлениям следует на основе методического анализа понятия функции в рамках понятия алгебраической системы. Функция при таком подходе выступает в виде отношения специального вида между двумя множествами, удовлетворяющего условию функциональности. Начальным этапом изучения понятия функции становится вывод его из понятия отношения.

Достоинствами логического подхода можно считать то, что его ис-

пользование при введении понятия требует иллюстрации понятия средствами различных средств, обогащающими язык школьной математики. Помимо формул и таблиц, здесь находят свое место задание функции стрелками, перечислением пар, использование не только числового, но и геометрического материала; геометрическое преобразование при таком подходе оказывается возможным рассматривать как функцию. Обобщенность возникающего понятия и вытекающие отсюда возможности установления разнообразных связей в обучении математике – основные достоинства такой трактовки.

Например, логику изучения понятия функции при логическом подходе можно представить в виде следующей схемы, изображенной на Рисунке 2.



Рисунок 2 – Логическая схема понятия функции

В школьных учебниках эта схема не выдерживается полностью. В частности, понятие прямого произведения множеств не вводится вовсе; понятие соответствия не определяется, а просто поясняется; понятие алгебраической операции рассматривается только факультативно и в старшей школе (а по существу, по усмотрению учителя, может и не рассматриваться).

1.2 Значение и методики изучения логарифмической функции

Согласно проведённому исследованию в различных учебно-методических комплексах понятие функции определяется и как правило, и как соответствие, и как закон, и как зависимость и др.

Для более объективного анализа учебной литературы рассмотрим пособия, включенные в Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования в 2019-2020 учебном году.

Так, в учебнике Алгебры за 7 класс (А.Г. Мордкович) определение функции дается в следующем виде: если даны числовое множество X и правило f , позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определённое число y , то это правило называется функцией.

По учебнику Алгебры 7 класса (Л.Г. Петерсон) функция рассматривается как правило f , по которому каждому элементу x из множества X ставится в соответствие единственный элемент y из множества Y .

Ю.Н. Макарычев и Н.Г. Миндюк в своем учебнике Алгебры за 7 класс вводят функцию как соответствие между двумя множествами, при котором каждому элементу одного множества соответствует единственный элемент другого множества.

Авторский коллектив под руководством С.М. Никольского и М.К. Потапова в 8 классе впервые вводят функцию иначе: пусть M есть некоторое множество чисел и пусть каждому числу x из M в силу некоторого (вполне определённого) закона поставлено в соответствие единственное число y , тогда говорят, что y есть функция от x , определённая на множестве M .

Если обратиться к схемам, изображенным на Рисунках 1 и 2, а также к определениям, представленными различными авторскими коллективами, (при генетическом и логическом подходе к введению понятия функции в средней школе), то видно, что в некоторых определениях идёт смешение этих двух подходов. То есть базовые понятия на основе которых вводится понятие появляются одновременно. Например, Г.В. Дорофеев, Е.А. Бунимович и др. в своём определении подчёркивают сразу и динамический характер функции и используют понятие множества.

Такое положение, с точки зрения логики, не несёт в себе никаких противоречий, однако, противоречия возникают в записи условий существования функции. Для примера, рассмотрим такую запись в задании 2.

Задача 2. Найдите область определения функции:

$$y = \sqrt{\ln(1 - x^2)} + \sqrt{3 - x}$$

Методические комментарии. Для решения поставленной задачи ученик, обычно, записывает условия существования функции (Область допустимых значений) в виде системы требований:

$$\begin{cases} 1 - x^2 > 0 \\ \ln(1 - x^2) \geq 0 \\ 3 - x \geq 0. \end{cases}$$

Далее приступает к ее последовательному решению. В результате получает, что решением неравенства $1 - x^2 > 0$ является числовой промежуток $x \in (-1; 1)$. Решением второго неравенства системы является $x = 0$. И, наконец, находит решение последнего неравенства системы $x \leq 3$. Затем вновь записывает найденные решения в виде системы

$$\begin{cases} x \in (-1; 1) \\ x = 0 \\ x \leq 3. \end{cases}$$

Очевидно, что запись системы в таком виде не корректна, поскольку в ней явно представлено, то, что сформированное понятие функции не совсем правильно. При этом школьник, очевидно, владеет операционной составляющей процедуры поиска решения области определения функции. Дабы избежать возникающих несоответствий необходимо перед введением понятия логарифмической функции привести в соответствие все знания обучающихся.

Если понятие функции было введено средствами методик генетиче-

ского подхода, то основой возникновения логарифмической функции является индуктивная и наглядная основа. Суть которой заключается в том, что многие реальные процессы, которые не поддаются описанию средствами алгебраических функций. Однако с достаточной точностью характеризуются трансцендентными функциями. В класс которых и входят показательная и логарифмическая функции. В частности, показательная функция служит моделью, описывающей реальные процессы естественного роста и убывания величин разного характера (демографических процессов, процессов радиоактивного распада, процессов скорости размножения бактерий и др.). В раскрытии закономерностей этих процессов, как раз и используются вышеназванные функции [11].

Поскольку вводимое понятие логарифмической функции имеет динамическую основу, то из дидактических соображений, понятие показательной и логарифмической функции следует вводить до введения понятия степенных функций с действительным показателем. Это утверждение обосновывается тем, что в этой ситуации рассмотрение показательной и логарифмической функции создаёт наглядную основу для понимания обучающимися назначения и свойств дробных показателей. При этом естественно при введении понятия делать акцент на то, что расширяется область изменения показателя, что приводит к изменению степени, но не основания.

Введение показательной и логарифмической функции на основе логического подхода сопровождается повторением основных понятий логического обоснования понятия функции и повторением и обобщением понятия степени на множество действительных чисел:

- 1) $a \in Q, x \in N$;
- 2) $a \in Q, a \neq 0, x \in Z$;
- 3) $a \in Q, a > 0, x \in Q$;
- 4) $a \in R, a > 0, x \in R$.

Самым слабым местом в формировании понятия показательной, и как следствие, логарифмической функции, является принятие без доказательства существования $a^x (a > 0)$ при иррациональном показателе значений переменной x . С этим логическим пробелом в практике обучения встре-

чаются и преодолевают препятствие посредством разъяснений большим количеством примеров реальных процессов. То есть и при логическом подходе, вольно или нет, но происходит смешение двух подходов к введению понятия функции.

Сами свойства показательной функции вводятся на основе практических (индуктивных) наблюдений, при построении графиков функций 2^x ; $(\frac{1}{2})^x$ на основе приёма «загущения» выбранных точек (чем больше взяли точек, тем точнее получается график). Причём, многие авторы УМК используют приём описания свойств функций, на основе построенных линий (графиков функций).

С одной стороны, такое положение можно считать плюсом в методике введения понятия, а с другой – здесь тоже возникают вопросы, причём вполне правомерные: а что происходит в тех точках, в которых мы не вычисляли значения функций? С этим логическим пробелом тоже приходится мириться, подтверждая возможность существования такой линии средствами примеров и демонстраций [11].

Понятие логарифмической функции, как при генетическом, так и при логическом подходе в большинстве случаев, возникает как необходимая модель описания решения уравнения, типа $2^x = 6$ [11]. Вначале решение этого уравнения находят геометрическим способом, приблизительно, а затем переходят к необходимости аналитической записи решения. В этой связи, изучение понятия логарифмической функции уместно предварить повторением графического метода решения уравнений и неравенств, при этом акцентируя внимание школьников на поиске ответов на такие вопросы, в которых бы актуализировались основные понятия и характеристики различных функций, различных взаимных расположений графиков функций и пр. Для примера рассмотрим следующие задания.

Задача 3. Решите графически уравнение:

$$\sqrt{x+3} = x+1$$

Решение. Запишем систему

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+3} \\ y = x+1 \end{cases}$$

и построим график функции в одной системе координат, изображенный на Рисунке 3.

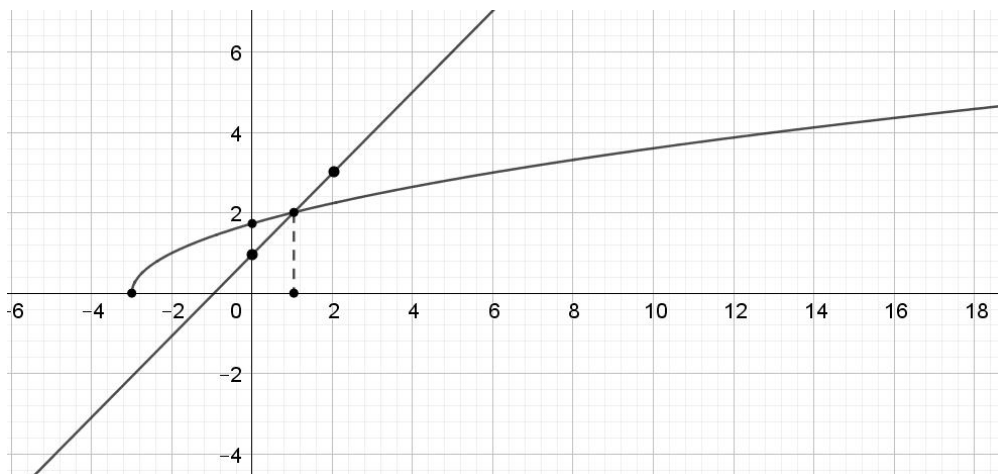


Рисунок 3 – график функции

По графику найдем абсциссу точки их пересечения: $x \approx 1$. Проверим полученное значение, получим:

$$\sqrt{1+3} = 1+1,$$

$$\sqrt{4} = 2,$$

$$2 = 2$$

Последнее равенство является верным, поэтому корнем уравнения является число 1.

После решения уравнения и обсуждения результатов уместно сделать их обобщение, то есть сформулировать общий подход к решению уравнений графическим методом: записать уравнение в виде

$$f(x) = g(x),$$

записать систему уравнений

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x), \end{cases}$$

а также построить в одной системе координат графики функций

$$y = f(x)$$

и

$$y = g(x);$$

после чего выписать абсциссы точек пересечения графиков функций; найденные числа подставить в исходное уравнение и проверить верность полученного числового равенства; если получено верное числовое равенство, то найденное число является корнем

Далее можно переходить к собственно проблеме: как решить уравнение $2^x = 6$ аналитическим методом? После чего уместно ввести понятие логарифма числа, понятия логарифмирования и только после этого, на основании изученного вводить понятие логарифмической функции, как функции обратной показательной.

Очевидно, что при любой, более или менее последовательной схеме изучения понятия логарифмической функции, всегда существуют логические пробелы в её изложении. Эти пробелы возникают уже на этапе введения понятия функции (на основании двух подходов - генетическом и логическом, и их постепенном слиянии), а затем на этапе введения показательной функции, как функции предка для логарифмической функции. Выходом из создавшегося положения, может служить метод аксиоматического введения понятия логарифмической функции.

1.3 Выводы по первой главе

В результате эволюции представлений о функции в школьном курсе математики сформировались два основных подхода к введению понятия функции: генетический и логический. Суть генетического подхода заклю-

чается в том, что основными понятиями, на которых формируется понятие функции, является представление о функциональной зависимости переменных величин в реальных процессах. Суть логического подхода заключается в представлении функции как соответствия или отношения, основой которых являются понятия алгебраической структуры. Методика реализации каждого из подходов в практике обучения имеет как положительные характеристики, так и отрицательные. В генетическом подходе хорошо реализуется принцип наглядности, а в логическом – принципы полноты и научности математического знания. В старшей школе, сформированные понятия, при любом подходе, в своих различиях сглаживаются, потому как школьники приступают к изучению числовых функций их видов и классов. Однако, при любом подходе, в изложении материала возникают логические пробелы, которые, мы полагаем, можно устранить посредством аксиоматического введения понятия логарифмической функции.

2 Методика использования аксиоматического подхода к определению логарифмической функции в курсе математики средней общеобразовательной школы

2.1 Условия использования аксиоматического метода

В науке, под аксиоматическим методом понимают способ построения научной теории, при котором в её основу кладут аксиомы, на которых все остальные утверждения этой теории выводятся путём доказательств, то есть формально-логических выводов. А построение какой-либо дисциплины аксиоматическим методом называют дедуктивным. В дедуктивных теориях обычно фигурируют основные объекты, как: элементы множества, классы, связанные отношениями на множествах, удовлетворяющие некоторой системе аксиом. Тем самым основные объекты, первоначально не определяемые, получают аксиоматическое определение [9].

Аксиоматический метод, в школьном обучении, используется, в основном при изучении геометрии (вводятся аксиомы планиметрии и на их основе изучается систематический курс планиметрии, все определения и теоремы которого основаны на системе аксиом).

Использование аксиоматического подхода в курсе алгебры, в основном, используется в старшей школе при введении трансцендентных функций (показательной, логарифмической и др.) в рамках элективных курсов по математике.

В математике существует несколько способов аксиоматического определения логарифмической функции.

Определение 1. Логарифмической функцией называется любой непрерывный гомоморфизм группы R в группу R^+ , то есть любая функция f из множества R (> 0) в множество, обладающая свойствами:

- 1) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$;
- 2) f — непрерывна.

Определение 1'. Логарифмической функцией с основанием a , где $a > 0$, называется логарифмическая функция, обладающая дополнительным свойством: 3) $f(a) = 1$.

Из свойства 1, то есть из гомоморфности $f(\cdot)$: 4) $f(1)=0$.

При $a = 1$ логарифмическая функция не существует. Часто ограничение $a \neq 1$ включают в определение функции, что тоже допустимо с аксиоматической точки зрения. А логарифмическую функцию с основанием a обозначают $\log_a x$.

Далее на основании введённого понятия доказываются все свойства логарифмической функции, и на её основе вводится понятие показательной функции.

Особенностями использования этого определения логарифмической функции является то, что для введения этого понятия у обучающихся должны быть сформированы такие понятия и представления как группа, гомоморфизм, биекция (необходимо при введении показательной функции). Кроме того, необходимы умения и навыки проверки и доказательства существования хотя бы одной функции с заданными свойствами. То есть, условием использования этого определения как основного при введении понятия логарифмической функции, является подготовительная и пропедевтическая работа учителя к восприятию нового материала. Что для школьников общеобразовательной школы не всегда посилено и не всегда выгодно по времени, затраченному на освоение дополнительных математических знаний.

Поэтому, в рамках логического подхода - в школьном курсе математики используют два направления использования аксиоматического метода при введении понятия логарифмической функции.

В первом направлении, формальное знакомство и выявление свойств логарифмической функции осуществляется контекстно и средствами дифференциального уравнения вида: $y' = ky, k \in R$. Причём в качестве постулата берётся существование и единственность функции $f(x)$, определённой на множестве R , удовлетворяющей данному дифференциальному уравнению и начальным условиям: $y(0)=1$. То есть, без доказательства принимаются существование и единственность функции $f(x)$, определённой на R , с начальными условиями: $f'(x) = kf(x)$ и $f(0) = 1$.

В этом случае сразу необходимо очень чётко отметить основные свойства и особенности вводимой функции $f(x)$. Для того, чтобы удовлетворять условию (1) необходимо, чтобы $f(x)$ на множестве R должна быть диффе-

ренцируемой, а поэтому непрерывной. Условие

$$f(0) = 1$$

требует того, чтобы $f(x)$ на R не принимала значений равных 0; однако, будучи непрерывной и принимая значение 1 при $x = 0$, она не принимала бы отрицательных значений; следовательно, на множестве R функция $f(x)$ принимает только положительные значения. Если $f(1)$ обозначить через a , ($a > 0$ по свойству функции $f(x)$), то функция имеет вид a^x и названа показательной. Рассмотрим особым образом показательную функцию, удовлетворяющую условию

$$y' = y(k = 1)$$

и начальному условию

$$y(0) = 1,$$

то есть двум условиям:

$$f'(x) = f(x)$$

и

$$f(0) = 1.$$

Эта функция получила название «экспонента» и для её обозначения введена особая буква e , то есть экспонента имеет вид e^x ; и будучи показательной функцией, e^x дифференцируема на R , непрерывна и принимает только положительные значения; и потому, что

$$(e^x)' = e^x,$$

а

$$e^x > 0,$$

следует, что e^x — возрастающая функция; а значит можно постулировать, что областью значений экспоненты является R^+ . Функция, обратная экспоненте e^x , называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln x$; при

этом, свойства $\ln x$ выявляются на основе общих свойств обратных функций; и поэтому, в качестве пропедевтики перед введением этой функции необходимо свойства обратных функций актуализировать. Показательная функция a^x с произвольным положительным основанием a есть решение дифференциального уравнения

$$y' = \ln a y$$

с начальным условием

$$y(0) = 1$$

(отсюда следует, что

$$(a^x)' = a^x \ln a);$$

функция a^x при $a > 1$ и убывает, при $0 < a < 1$. Функция, обратная функции a^x ($a > 0, a \neq 1$), называется логарифмом по основанию a и обозначается $\log_a x$. Свойства логарифмической функции выводятся на основе общих свойств обратных функций.

Использование выше представленного введения понятия логарифмической функции, с одной стороны, достаточно корректно, логично и обосновано. Но требует достаточной пропедевтической работы учителя: по повторению теории обратных функций, актуализации навыков исследования свойств функций, актуализации построения графиков функций и др.

Второй подход аксиоматического введения понятия логарифмической функции так же находится в рамках логического подхода. В этом подходе определение логарифмической функции начинается с её определения как интеграла с переменной верхней границей:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Предложенный вариант введения логарифмической функции изложен в УМК авторов Н. Я. Виленкина, С. И. Шварцбурда и др. [5]. Причём, авторы понятие показательной функции вводят как функции описывающей процессы показательного роста и убывания, а логарифмической как интеграла с переменным верхним пределом.

Но существует и другой способ введения: логарифмическая функция вводится как интеграл, а затем вводится экспонента, как обратная логарифмической. По крайней мере, в ранее существовавшем учебнике Е. С. Кочеткова «Алгебра и начала анализа. 10 класс», был использован именно такой подход [1].

По существу, в этих двух направлениях отличается только порядок изложения понятия логарифмической функции. И с точки зрения логики – эти оба варианта, эквивалентны. Однако методически, второй вариант предпочтительнее потому, что введение логарифмической функции через интеграл может стать логическим продолжением изучения понятия интеграл. А потому, не потребует дополнительной работы по активизации необходимых знаний для изучения нового материала.

Кроме того, введение логарифмической функции, как решения интеграла, позволяет контекстно формировать математическую культуру школьников, расширяя их представления о понятии функции.

2.2 Примеры уроков с использованием аксиоматического метода

Особенности и вариативность составных элементов урока определяют его типологическое разнообразие, что позволяет классифицировать школьные уроки по ряду признаков. Это обстоятельство требует выяснения характеристик урока. В этой связи обратимся к известным в теории обучения классификациям уроков.

Классификация уроков по ведущей дидактической цели. К первому типу уроков по дидактической цели относят: уроки изучения нового материала (уроки последовательного изучения ключевых вопросов темы), уроки закрепления изученного материала, уроки систематизации и обобщения знаний, умений, навыков, уроки контроля результатов обучения. Ко второму типу уроков по дидактической цели относят: вводные (уроки изучения ключевых вопросов темы), текущие (уроки закрепления изученного материала), обобщающие (уроки систематизации и обобщения знаний, умений и навыков), контролирующие (уроки контроля результатов обучения).

Первый тип уроков соответствует общепринятому пошаговому подходу к раскрытию и изучению программного материала. Второй вариант менее распространен, но соответствует логике блочно-модульного подхода к процессу обучения и более предпочтителен в реализации идей Федерального государственного образовательного стандарта Основного общего образования.

Классификация первого и второго типа, естественным образом диктует соответствующую логику отбора заданий для использования аксиоматического подхода при изучении логарифмической функции.

Рассмотрим первый тип уроков по дидактической цели. В уроки последовательного изучения ключевых вопросов темы следует включать задания на актуализацию понятий область определения функции, область значения функции, понятие интеграла, правила и способы вычисления интеграла с переменной верхней границей, геометрический смысл определённого интеграла. Для уроков систематизации и обобщений знаний, умений и навыков, а также контроля результатов обучения характерными будут задания на изучение свойств функции, на решение задач с параметром на основе свойств функции.

Перейдем к анализу второго типа уроков. На вводных уроках целесообразно предлагать учащимся задания, разъясняющие суть используемого подхода. Для текущих уроков характерны упражнения, задачи из учебника, с сайтов цифровых образовательных ресурсов, разъясняющие вводимое понятие и его использования в данном контексте. И наконец для уроков обобщающего и контролирующего типов нужно давать задания на систематизацию, классификацию изученной функции в классе числовых функций.

Очевидно, что внутренняя и внешняя структура первого и второго типа уроков методики использования аксиоматического подхода при изучении логарифмической функции – остаётся единой и связной. По отношению к внешней структуре уроков этого типа можно сказать, что она формируется по формальному признаку (выделенными этапами урока): актуализация знаний, мотивация введения нового знания, формирование нового знания и т.д. Или: актуализация опорных знаний, формирование алгоритмов и т.д. А внутренняя структура задаётся логикой развития учебно-познавательной и связанной с ней мыслительной деятельности учащихся по освоению понятий (узнавание, воспроизведение, понимание и т.д.). Но, логика развития учебно-познавательной деятельности школьников в связи с использованием аксиоматического метода меняется, а значит меняется и *алгоритм проектирования урока*. В него включается алгоритм отбора заданий, реализующих аксиоматическое введение функции.

Например, проектирование урока открытия новых знаний заключается в обеспечении методических условий средствами аксиоматического метода достижения трёх целей: *деятельностной* (научить детей новым способам нахождения знания, ввести новые понятия, термины); *содержательной* (сформировать систему новых понятий, расширить знания учеников за счет включения новых определений, терминов, описаний); *формирующей* (обучение (или закрепление) приёмов изучения различного класса функций).

Для проектирования конкретного урока, как первого, так и второго типа с использованием аксиоматического метода заключается рекомендуем в самом начале выделить и сформулировать новое знание (разные подходы

к определению понятия логарифмической функции). После этого перейти к моделированию способа открытия нового знания и формулировании целей урока. Исходя из целей урока вычленить мыслительные операции, используемые при открытии нового знания, зафиксировав необходимые знания, умения, навыки для освоения нового материала. Затем следует подобрать упражнения для этапа актуализации, опираясь на перечень необходимых мыслительных операций и знаний, умений, навыков, после чего смоделировать затруднение и способ его фиксации средствами аксиоматического подхода. Также предлагаем продумать проблемную ситуацию и подготовить вопросы для ведения диалога с учащимися, включая подводящие и корректирующие вопросы и задания для организации взаимодействия. Кроме всего вышеперечисленного предлагаем определить приемы организации и проведения первичного закрепления полученных знаний, а также подобрать задания для этапа повторения. Заключительным шагом будет являться разработка последовательности поведения урока и способов взаимодействия учителя и обучающегося на каждом этапе урока, составив технологическую карту урока.

На этапе *мотивации* учитель поясняет цель урока, мотивирует необходимость изучения нового материала, а учащиеся вникают в суть проблемы, осознают цель урока. Содержание учебного материала на данном этапе должно быть спроектировано так, чтобы использовались примеры, задания, демонстрации, поясняющие необходимость введения нового знания. Этап *актуализации знаний* характерен тем, что учитель предлагает задания (можно проблемного характера), в которых актуализированы необходимые знания, а учащиеся в свою очередь выполняют эти задания, фиксируя те знания, которые необходимы для изучения нового материала. Изучение нового материала целесообразно начинать с введения школьников в проблемную ситуацию, для выхода из которой учитель помогает составить план работы и организовать эту работу. На этапе *закрепления полученных знаний* учащиеся выполняют упражнения тренировочного характера, тесты на распознавание. Подводя итоги урока, учителю необходимо организовать *рефлексию*, согласно которой учащиеся осуществляют самоанализ по изученному новому знанию, по эмоциональному состоянию во время урока.

Данный этап может сопровождаться слайдами на проекторе.

Итак, каждый из уроков первого и второго типа, алгоритм проектирования урока, технологическая карта урока – представляют собой модель проектирования урока, который входит в классификацию «по дидактическим целям».

Рассмотрим фрагменты уроков введения понятия логарифмической функции с помощью интеграла для уроков первого и второго типа.

Фрагмент урока первого типа (урок изучения ключевых вопросов темы).

Тема урока: Определение функции $\ln x$.

Цели урока: деятельностная (научить школьников новому способу нахождения знания о том, как может быть введена логарифмическая функция), содержательная (продолжить формировать системы понятий о функции); формирующая (обучение приемам использования понятия логарифмической функции в решении математических задач).

Методические комментарии для учителя. Рассматриваемый фрагмент, является частью урока изучения нового материала и входит в систему уроков последовательного изучения логарифмической функции. Предварительно у обучающихся уже сформированы представления о функции и её основных характеристиках (школьники имеют представления о способах задания функции, её области определения, множестве её значений, умеют строить графики элементарных функций, владеют техникой вычисления интегралов, понимают геометрический смысл интеграла). С целью актуализации знаний, необходимых для изучения нового учебного содержания, учитель предлагает учащимся следующие задания:

Задание 1. Постройте соответствия между графиками первообразных и их аналитическим изображением.

Учащиеся, выполняя задание, обнаруживают, что для первообразной

$$\ln x = \int \frac{1}{x} dx$$

они ещё не знают графика функции.

Учитель фиксирует внимание обучающихся на том, что для функции

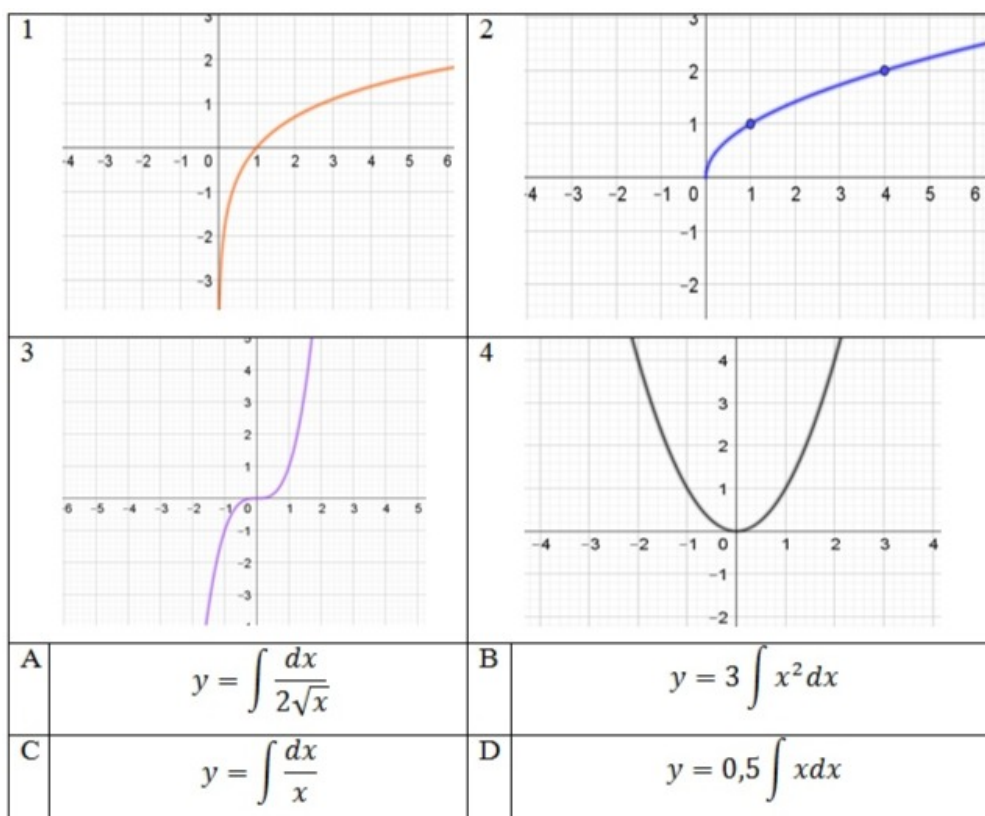


Рисунок 4 – Задание 1

$\frac{1}{x}$ они ещё не знают первообразной. Далее учитель определяет натуральный логарифм.

Определение 2. Натуральным логарифмом положительного числа x называют значение интеграла

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Его значение обозначают

$$\ln x : \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Далее учитель совместно с обучающимися описывает все свойства введённой функции.

Здесь уместно задавать школьникам вопросы:

Как Вы думаете, почему областью определения считают только положительные значения x ? (*Предполагаемый ответ учащихся:* ввиду того, что функция $\frac{1}{x}$ при положительных значениях непрерывна на этом множе-

стве).

Как Вы думаете, какие значения может принимать функция при $x = 1$? (*Предполагаемый ответ учащихся*: так как при $x = 1$, значение этой функции равно

$$\int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0,$$

то

$$\ln 1 = 0).$$

Почему новая функция является дифференцируемой на области определения? (*Предполагаемый ответ учащихся*: интеграл

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt$$

является одной из первообразных для подынтегральной функции, это значит, что

$$(\ln x)' = \left(\int_1^x \frac{1}{t} dt \right)' = \frac{1}{x}.$$

То есть, логарифмическая функция является дифференцируемой и

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Можно ли логарифмическую функцию назвать непрерывной на области определения? (*Предполагаемый ответ учащихся*: да, можно, поскольку она дифференцируема на луче).

После фронтального обсуждения свойств логарифмической функции, учитель предлагает обучающимся выполнить следующие задания самостоятельно.

Задание 2. Найдите область определения заданных функций:

- а) $y = \ln x^2$ (Ответ: $x \neq 0$);
- б) $y = \ln(x - 5)$ (Ответ: $x > 5$);
- в) $y = \ln(x - 2) + \ln(3 - x)$ (Ответ: $2 < x < 3$).

Задание 3. Выясните, при каких значениях параметра a функция $y = \ln(x - a)$ определена на множестве $(1; \infty)$? (Ответ: при $a = 1$).

После проделанной работы учитель обсуждает с обучающимися пред-

ставленные решения.

По окончании урока учитель ещё раз формулирует определение логарифмической функции с натуральным основанием, даёт домашнее задание.

2. Фрагмент урока второго типа (модульноблочного изучения ключевых вопросов темы).

Тема урока: Определение функции $\ln x$, ее свойства и график.

Цели урока: деятельностная (научить школьников новому способу нахождения знания о том, как может быть введена логарифмическая функция), содержательная (продолжить формировать системы понятий о функции), формирующая (обучение приемам использования понятия логарифмической функции в решении математических задач; развитие умений структурирования учебного содержания).

Методические комментарии для учителя. Рассматриваемый фрагмент, является частью вводного урока изучения ключевых вопросов темы и урок систематизации представлений о понятии функция, изученных ранее.

С целью *актуализации знаний*, необходимых для изучения нового учебного содержания, учитель предлагает учащимся следующее задание, материал к которому учитель должен заготовить на персональном компьютере до начала урока либо на электронной доске (на экране примеры из задания 1, урока 1).

Далее учитель обсуждает со школьниками предложенные решения и подводит их к необходимости введения новой функции.

Последующее изложение учебного содержания соответствует изложению материала пособия [5]. По ходу изучения содержания составляется блок-схема изученного материала.

2.3 Выводы по второй главе

В школьном курсе алгебры понятие логарифмической функции средствами аксиоматического метода реализуется двумя способами: функция вводится как решение дифференциального уравнения и как значение первообразной. Аксиоматический метод введения понятия логарифмической функции наиболее приемлем в классах с углублённым изучением математики, либо в классах профильной направленности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проделанной работы было выявлено содержание и суть методов введения понятия функции в школьном обучении. В современной методике обучения математике используются, в основном два подхода: генетический и логический. Суть генетического подхода заключается в том, что основными понятиями, на которых формируется понятие функции, является представление о функциональной зависимости переменных величин в реальных процессах. Суть логического подхода заключается в представлении функции как соответствия или отношения, основой которых являются понятия алгебраической структуры. В рамках логического подхода к введению понятия функции существует аксиоматический. Суть этого подхода заключается в том, что на основе постулируемой функции, выводятся её свойства, на основе которых потом строится график. Преимущества такого подхода к введению понятия логарифмической функции заключаются в том, что в этом случае не нарушается логика изложения, все вводимые понятия обоснованы и корректны.

В ходе данной курсовой работы цель и все поставленные для ее решения задачи были успешно достигнуты.

Новизна работы. Предложена апробация аксиоматического подхода к определению логарифмической функции в школьном курсе математики.

Практическая значимость работы заключается в том, что она может быть полезна учителям средних общеобразовательных школ, студентам высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки: «44.03.01 Педагогическое образование (профиль подготовки — математика)» и «44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки — математика, информатика)», а также школьникам, увлекающимся математикой, для самостоятельной работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Алгебра и элементарные функции. В 2 ч. Уч. пособие для 9-10 классов. / Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. [Электронный ресурс]. URL:<https://s.11klassov.ru/9616-algebra-i-jelementarnye-funkcii-v-2-ch-uch-posobie-dlja-9-10-klassov-kochetkov-es-kochetkova-es.html> (дата обращения: 20.02.2020).

2 Болтянский, В. Г., Розов, Н. Х. Ленинская теория познания и математические понятия. // Квант, 1970, №7. – 9 с.

3 Виленкин, Н. Я. и др. Современные основы школьного курса математики. – М. Просвещение. – 1980. – 240 с.

4 Виленкин, Н. Я. Рассказы о множествах. 3-е издание. — М.: МЦНМО, 2005. — 150 с. ISBN 5-94057-036-4.

5 Алгебра и математический анализ для 11 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. — 6-е изд. — М.: Просвещение, 1998. — 288 с.: ил. — ISBN 5-09-008036-4.

6 Колмогоров, А. Н. Летняя школа на Рубском озере. Из опыта работы летней физико-математической школы. М. , 1971. – 160 с.

7 Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2-х томах. Т. 1, Арифметика. Алгебра. Анализ: пер. с нем. Под ред. В.Г. Болтянского. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 432 с.

8 Математика в понятиях, определения и терминах. Ч. I. Пособие для учителей. Под ред. Л.В. Сабинаина. М., Просвещение, 1978. – 320 с.

9 Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики. Учеб. пособие для студентов физ. – мат. фак. пед. ин-тов. М. , Просвещение, 1977. – 480 с.

10 Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных

учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2008. – 399 с.

11 Понятие функции и её аналитического выражения. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.eidos.ru/journal/2007/0705> (дата обращения: 23.02.2020).

12 Розов, Н. Х. Функции и графики. // Н.Х. Розов. В сб. Активизация обучения математике в сельской школе. Сб. статей. / Сост. Ю.М. Колягин. М. , Просвещение, 1975. – С. 98.

13 Теория функций комплексной переменной. Основы теории : учебное пособие для студентов педагогических вузов / А.Б. Шишкин; Славянский-на-Кубани государственный педагогический институт. — Славянск-на-Кубани : Издательский центр СГПИ, 2010. — 195 с. ISBN 978-5-91980-021-7.

14 Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / А45 [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. — М. : Просвещение, 2014. — 301 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-027740-2.

15 Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. Учебник для 7 класса. Часть 1 / Л.Г. Петерсон, Д.Л. Абраров, Е.В. Чуткова. — М. : Издательство «Ювента», 201. — 136 с: ил. ISBN 978-5-85429-511-6.

16 Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. — 13-е изд., испр. — М. : Мнемозина, 2009. — 160 с. : ил. ISBN 978-5-346-01198-9.

17 Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. — 18-е изд. — М. : Просвещение, 2009. — 240 с. : ил.



СПРАВКА

о результатах проверки текстового документа на наличие заимствований

Проверка выполнена в системе Антиплагиат.ВУЗ

Автор работы	Вихров Сергей Евгеньевич
Подразделение	Кафедра математики, информатики, естественнонаучных и общетехнических дисциплин
Тип работы	Курсовая работа
Название работы	Аксиоматический подход к определению логарифмической функции в курсе математики средней общеобразовательной школы
Название файла	Курсовая работа.pdf
Процент заимствования	10.53 %
Процент самоцитирования	0.00 %
Процент цитирования	1.33 %
Процент оригинальности	88.14 %
Дата проверки	15:05:24 18 мая 2020г.
Модули поиска	Модуль поиска ИПС "Адилет"; Модуль выделения библиографических записей; Сводная коллекция ЭБС; Коллекция РГБ; Цитирование; Модуль поиска переводных заимствований; Модуль поиска переводных заимствований по elibrary (EnRu); Модуль поиска переводных заимствований по интернет (EnRu); Модуль поиска переводных заимствований по Wiley (RuEn); Коллекция eLIBRARY.RU; Коллекция ГАРАНТ; Модуль поиска Интернет; Модуль поиска "КубГУ"; Коллекция Медицина; Модуль поиска перефразирований eLIBRARY.RU; Модуль поиска перефразирований Интернет; Коллекция Патенты; Модуль поиска общепотребительных выражений; Кольцо вузов; Коллекция Wiley
Работу проверил	Шишкин Андрей Борисович ФИО проверяющего
Дата подписи	Подпись проверяющего

