**Комбинаторика и теория вероятностей генетики.**

Ни одна наука не может обойтись без математики, как надежного и несомненно точного инструмента вычисления. В данном случае будет показано, как в науке генетика применяются законы математики. Конечно, чтобы решить к примеру, задачу по генетике, вы должны знать основные понятия, законы и т.д. Но вот что если зная законы генетики, соединить из со знаниями математики для более точного и удобного расчета данных.

Теория вероятностей по сути своей занимается изучением случайных событий и действий над ними. Случайное событие – основное неопределяемое понятие теории вероятностей. Случайное событие – это результат опыта, испытания. Оно может произойти или не произойти.

И где же как не в генетике с ее теорией наследования признака, мутациями, можно найти открытый пример теории вероятностей? Тем более, что просматриваются случайные события, которые можно повторять много раз. Например, Грегор Мендель проделал 287 опытов с 10 000 горохом, начало современной генетики.

Генетика — наука, изучающая наследственность и изменчивость организмов. Наследственность — способность организмов передавать из поколения в поколение свои признаки (особенности строения, функций, развития). Изменчивость — способность организмов приобретать новые признаки. Наследственность и изменчивость — два противоположных, но взаимосвязанных свойства организма.

Ген и аллели. Единицей наследственной информации является ген. Ген (с точки зрения генетики) — участок хромосомы, определяющий развитие у организма одного или нескольких признаков. Аллели — различные состояния одного и того же гена, располагающиеся в определенном локусе (участке) гомологичных хромосом и определяющие развитие одного какого-то признака. Гомологичные хромосомы имеются только в клетках, содержащих диплоидный набор хромосом. Их нет в половых клетках (гаметах) эукариот и у прокариот.

Доминантные и рецессивные признаки и аллели. Признак (фен ) — некоторое качество или свойство, по которому можно отличить один организм от другого. Явление преобладания у гибрида признака одного из родителей называется доминированием. Признак, проявляющийся в первом поколении гибридов, называется доминантным, а внешне исчезающий — рецессивным (табл. 6.1). Аллель, определяющий доминантный признак, называется доминантным и обозначается латинской прописной буквой: А, В, С ,..., а аллель, определяющий рецессивный признак — рецессивным и обозначается строчной буквой: а, 1), с......Доминантный аллель обеспечивает развитие признака как в гомо-, так и в гетерозиготном состоянии, рецессивный аллель проявляется только в гомозиготном состоянии.

Гомозигота и гетерозигота. Организмы (зиготы) могут быть гомозиготными и гетерозиготными. Гомозигот ные организмы имеют в своем генотипе два одинаковых аллеля — оба доминантные или оба рецессивные (А А или аа). Гетерозиготные организмы имеют один из аллелей в доминантной форме, а другой — в рецессивной (А а). Гомозиготные особи не дают расщепления в следующем поколении, а гетерозиготные дают расщепление.

*Рассмотрим такую задачу.*

Для эксперимента Мендель взял два сорта гороха, отличающихся по одному признаку: у одного семена были желтыми, а у другого – зелеными. Оказалось, что в первом гибридном поколении образовывались только желтые семена. В дальнейшем Мендель вырастил из семян первого гибридного поколения растения, провел их самоопыление и получил семена. Он их высеял и вырастил новые растения. Так Мендель получил растения второго поколения. Он обнаружил, что окраска семян у растений второго поколения различалась. Первый раз из 8023 семян оказалось 6022 желтых, а остальные зеленые. Найти частоту появления желтого гороха и частота появления зеленого гороха.

Частота появления для желтого гороха: n = 8023, m = 6022

m/n = 6022/8023 = 3/4 ≈ 0,75

Частота появления для зеленого гороха: n = 8023, m = 8023-6022=2001

m/n = 2001/8023 = 1/4 ≈ 0,25

Таким образом, при достаточно большом значении n частоту принимают за вероятность события.

Вероятностью события A называют отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу: P(A) = m/n

Вероятность достоверного события f равна 1: P(f)=1.

Вероятность невозможного события f1 равна 0: P(f1)=0.

Вероятность произвольного случайного события f2 располагается между 0 и 1: 0<P(f)<1.

*Свойства вероятности.*
Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие события. Под событием понимают любой факт, который может произойти в результате опыта или испытания. Под *опытом*, или *испытанием*, понимается осуществление определённого комплекса условий.

*Примеры событий:*

– попадание в цель при выстреле из орудия (опыт — произведение выстрела; событие — попадание в цель);
– выпадение двух гербов при трёхкратном бросании монеты (опыт — трёхкратное бросание монеты; событие — выпадение двух гербов);
– появление ошибки измерения в заданных пределах при измерении дальности до цели (опыт — измерение дальности; событие — ошибка измерения).

Можно привести бесчисленное множество подобных примеров. События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита  и т.д.

Различают *события* совместные и несовместные. События называются совместными, если наступление одного из них не исключает наступления другого. В противном случае события называются несовместными. Например, подбрасываются две игральные кости. Событие  — выпадание трех очков на первой игральной кости, событие  — выпадание трех очков на второй кости.  и  — совместные события. Пусть в магазин поступила партия обуви одного фасона и размера, но разного цвета. Событие  — наудачу взятая коробка окажется с обувью черного цвета, событие  — коробка окажется с обувью коричневого цвета,  и  — несовместные события.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в условиях данного опыта.

Событие называется невозможным, если оно не может произойти в условиях данного опыта. Например, событие, заключающееся в том, что из партии стандартных деталей будет взята стандартная деталь, является достоверным, а нестандартная — невозможным.

Событие называется *возможным*, или *случайным*, если в результате опыта оно может появиться, но может и не появиться. Примером случайного события может служить выявление дефектов изделия при контроле партии готовой продукции, несоответствие размера обрабатываемого изделия заданному, отказ одного из звеньев автоматизированной системы управления.
 События называются *равновозможными*, если по условиям испытания ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другие. Например, пусть магазину поставляют электролампочки (причем в равных количествах) несколько заводов-изготовителей. События, состоящие в покупке лампочки любого из этих заводов, равновозможны.

 Важным понятием является *полная группа событий*. Несколько событий в данном опыте образуют полную группу, если в результате опыта обязательно появится хотя бы одно из них. Например, в урне находится десять шаров, из них шесть шаров красных, четыре белых, причем пять шаров имеют номера.  — появление красного шара при одном извлечении,  — появление белого шара,  — появление шара с номером. События  образуют полную группу совместных событий.

 Введем понятие противоположного, или дополнительного, события. Под *противоположным* событием  понимается событие, которое обязательно должно произойти, если не наступило некоторое событие. Противоположные события несовместны и единственно возможны. Они образуют полную группу событий. Например, если партия изготовленных изделий состоит из годных и бракованных, то при извлечении одного изделия оно может оказаться либо годным — событие , либо бракованным — событие .

*Операции над событиями*

При разработке аппарата и методики исследования случайных событий в теории вероятностей очень важным является понятие суммы и произведения событий.

 *Суммой, или объединением*, нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Сумма  S событий  A,B,C,…,N обозначается так: S=A+B+C+…+N

Например, если событие A есть попадание в цель при первом выстреле, событие  B— при втором, то событие C=A+B  есть попадание в цель вообще, безразлично, при каком выстреле — первом, втором или при обоих вместе.

*Произведением, или пересечением*, нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Произведение S   событий A,B,C,…,N обозначается: S=A\*B\*C\*…\*N

Например, если событие A  есть попадание в цель при первом выстреле, событие  B— при втором, то событие  C= A\*B состоит в том, что в цель попали при обоих выстрелах.

Пример 1.

Когда мы рассматриваем процесс образования гамет у гетерозиготной особи при моногибридном скрещивании, то ясно, что может образоваться 50% гамет с генами рецессивного признака и 50% - с генами доминантного, т.к. вероятность обоих типов равны: Р(А)=Р(а)=1/2. При образовании зигот, например при анализирующем скрещивании Аа×аа, возможны четыре случая: Аа, Аа,аа и аа.

Вероятность рождения гетерозигот Р(Аа)=1/2, поскольку попадание в зиготу доминантного гена будет происходить в каждом втором случае.

Пример 2. У человека карий цвет глаз является доминантным, а голубой цвет - рецессивным признаком. Кареглазая женщина, отец которой имел голубые глаза, выходит замуж за голубоглазого мужчину. Определите вероятность рождения в этой семье голубоглазого ребёнка. 

Вероятность появления всех генотипов в F1 равна 1,т. к. слияние гамет случайно, поэтому появление двух типов зигот равновероятно. Вероятность появления одного генотипа из двух возможных равна ½.

Пример 3. Врождённый сахарный диабет обусловлен рецессивным аутосомным геном d с пенетрантностью у женщин 90%, у мужчин - 70%. Определите вероятность фенотипов детей в семье, где оба родителя являлись гетерозиготными носителями этого гена. Решение. Вероятность получить этот рецессивный ген в гомозиготном состоянии у девочек и у мальчиков равна 0,25: 

Однако в силу различной пенетрантности этого гена у девочек и мальчиков соотношение фенотипов среди девочек и мальчиков окажется разным. Вероятность сахарного диабета у девочек окажется 0,25·0.9=0,225, у мальчиков 0,25 ·0,7= 0,175. Так как вероятность рождения мальчика и девочки примерно равны (0,5), то вероятность появления диабетика в этой семье равна: (0,225 +0,175) ·0,5=0,2. Следовательно, вероятность фенотипов детей в этой семье составляет 80% здоровых и 20% диабетиков.

Пример 4. Чтобы найти вероятность образования всех гомозигот при этом скрещивании, надо сложить вероятности образования каждого вида гомозигот: Р(аа) +Р(АА)= 0,25 +0,25=0,5. Эти события несовместны, так как организм может иметь только одну аллельную пару (кроме полиплоидов).

*Элементы комбинаторики.*

При решении задач теории вероятностей часто используют следующие понятия комбинаторики: перестановка, сочетание и размещение, а также правило умножения и правило сложения. *Правило сложения.*Если два взаимно исключающие друг друга действия могут выполняться соответственно m или n способами, то выполнить одно любое из этих действий можно m+n способами.

 *Правило сложения вероятностей в генетике.* Правило сложения гласит, если мы хотим узнать вероятность реализации либо одного, либо другого события, то вероятности каждого из этих событий складываются. Так, если нас будет интересовать вероятность гомозиготного потомства в браке гетерозиготных родителей, то надо сложить вероятности рецессивных и доминантных гомозигот, т.е. 1/4 +1/4 = 1/2. Этими правилами приходится довольно часто пользоваться врачам-генетикам во время медико-генетического консультирования при расчете вероятностей тех или иных событий в семьях, имеющих больного наследственным заболеванием ребенка.

*Правило умножения*. Если требуется выполнить одно за другим какие-то k действий , которые можно выполнить соответственно n1, n2, ..., nk способами, то все k действий вместе могут быть выполнены n1, n2, ..., nk способами. Правило умножения в генетике. Правило умножения гласит, что если какие-то события наблюдаются независимо друг от друга, то вероятность того, что два события будут происходить одновременно, равна произведению вероятностей этих событий. Вероятность образования гамет с рецессивным геном у родителей, гетерозиготных по этому гену, составляет 1/2 для каждого родителя. Вероятность «встречи» таких гамет с рецессивным геном при образовании зигот будет равна произведению вероятностей образования таких гамет у каждого из родителей, т.е. 1/2 х 1/2 = 1/4.

*Перестановоки с повторениями. *

Пусть дано множество из n элементов. Всевозможные последовательности из всех n элементов называют перестановкам без повторений. Общее число Pn различных перестановок из n объектов вычисляют по формуле P n =n! , где n!=1 ⋅ 2…n, при этом считают что 0!=1.

*Размещениями* из n по m называется упорядоченный набор m элементов, выбранных из данного множества, содержащего n различных элементов. Общее число различных размещений m An из n объектов по m вычисляют по формуле . 

 *Сочетаниями* из n по m называются подмножества из m элементов, выбранных из данного множества, содержащего n различных элементов. Общее число различных сочетаний m Cn из n объектов по m вычисляют по формуле 

 *Сочетания с повторениями*: 

Комбинаторный анализ применяется в тех многочисленных вопросах естествознания, которые связаны с перебором множества возможностей, с выделением из этого множества тех или иных подмножеств.

*Пример 2.*

Какое расщепление по фенотипу будет в третьем поколении при самоопылении гетерозиготной остистой краснозерной пшеницы, если признаки наследуются независимо и красное зерно доминирует над белым, а остистость – над безостистостью.



Учитывая, что гомозиготы при самоопылении не дают расщепление, а гетерозиготы расщепляются с вероятностью  , то во втором поколении получим По фенотипам



*Пример 3.*

Хорошо известно, что хромосому схематично можно представить как цепочку генов. При этом свойства хромосомы зависят не только от состава генов, но и от их расположения в цепочке. Существуют методы, позволяющие изменить порядок генов в хромосоме. Возникает вопрос: какое количество хромосом можно получить из данной, изменяя в ней порядок следования генов? Пусть исходная хромосома состоит из n генов. Обозначим их а1, а2,, аn и пусть А={а1, а2,, аn}. Тогда понятно, что каждая хромосома, имеющая данный набор генов, есть перестановка множества А. Число таких перестановок, как известно, равно n!.

*Пример 4.*

Пусть имеется n сортов мономеров (например, азотистых оснований). Из этих мономеров образуется полимер, который можно представить как цепочку из k мономеров. При этом k, как правило, больше n, и мономеры в цепочке могут повторяться. Какое количество различных полимеров длины k можно образовать из данных n сортов мономеров? Будем считать набор мономеров алфавитом из n элементов. Тогда каждый полимер, состоящий из k мономеров, есть слово длины k. Число таких слов, как известно, равно nk. А число различных полимеров будет в два раза меньше, так как, например, молекулы а1а2а3 и а3а2а1 мы не различаем (одна из них превращается в другую, если её повернуть на 1800). В частности, если алфавит состоит из 4 азотистых оснований А, Ц, Г и Т (т. е. n=4), а полимером является ген (средняя длина гена равна 1000 единиц, т. е. k=1000), то число всевозможных генов, которые можно получить из 4 оснований, равно nk= 41000= 21999.

*Пример 5.*

Рассмотрим процесс расхождения нитей хромосом к полюсам. Пусть имеется n спаренных хромосом, т. е. 2n нитей: A4 b4. Пара аibi соответствует двум нитям одной i-й хромосомы. При расхождении может случиться, что часть нитей аi пойдёт к левому полюсу, а часть – к правому. При этом если аi1 отошло к какому-нибудь полюсу, то bi1 отойдёт обязательно к противоположному полюсу: ←а1 b1→ ←а2 b2→ ←а3 b3→ ←а4 b4→ В зависимости от того , сколько и какие аi отойдут, например, к правому полюсу, зависит тип получающейся гаметы. Возникает вопрос: сколько различных типов гамет может получиться при всевозможных вариантах расхождения? Подсчитаем это число. Так как тип гаметы определяется тем, какое подмножество из множества А={а1, а2,, аn} отойдёт к правому полюсу, то число всевозможных типов гамет равно числу всевозможных подмножеств множества А={а1, а2,, аn}. Это число, как известно, равно 2n.

Как мы смогли увидеть, задачи генетического характера можно решать с помощью уравнений математики. Конечно, можно было чертить решетку Пеннета, проводить и расписывать гены, но это можно записать одним не очень мудреным уравнением и с легкостью посчитать. Конечно, красоту данного подхода заметили уже довольно давно, но систематизировать еще не решались в полной мере. По этому мы наглядно убедились о возможности существования нового способа решения задач генетики.

*Используемые источники информации:*

1. <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=osnovnye-ponyatiya-tyeorii-veroyatnostyei>
2. Л. В. Тарасов. Мир, построенный на вероятности
3. Коренева Л.Г. Генетика и математика
4. Зайцев И.А. Высшая математика ( для С/х вузов)
5. "Законы Менделя в медицине. Аутосомно-доминантное наследование" <http://dommedika.com/68.html>
6. http://allabiolog.ucoz.ru/index/zadachi\_po\_genetike\_s\_resheniem/0-34
7. Решение усложненных задач по генетике. http://www.biorepet-ufa.ru/resheniegeneticheskix-zadach/reshenie-uslozhnennyx-zadach-po-genetike.html
8. Решение задач по генетике http://genetika.aiq.ru/teorija/teorija.php
9. Генетика: сборник задач с решениями <http://5fan.ru/wievjob.php?id=6540>
10. Комбинаторика и теория вероятностей в биологии. Преподаватели ГАПОУ МО «МКЭиИТ» Панкратьева Е.Н. и Сипачева О. И.
11. [profhelp.net/2437985/](https://text.ru/rd/aHR0cHM6Ly9wcm9maGVscC5uZXQvMjQzNzk4NS8%3D)
12. [koi.tspu.ru/koi\_books/fedotov5/rasdel1.htm](https://text.ru/rd/aHR0cDovL2tvaS50c3B1LnJ1L2tvaV9ib29rcy9mZWRvdG92NS9yYXNkZWwxLmh0bQ%3D%3D)
13. <http://www.referat911.ru/Matematika/osnovnye-ponyatiya-te...6-349589-place1.html>
14. <http://profhelp.net/2437985/>
15. [studopedia.su/15\_160115\_osnovnie-teoremi-teorii-veroyatnostey.html](https://text.ru/rd/aHR0cHM6Ly9zdHVkb3BlZGlhLnN1LzE1XzE2MDExNV9vc25vdm5pZS10ZW9yZW1pLXRlb3JpaS12ZXJveWF0bm9zdGV5Lmh0bWw%3D)
16. [www.distanz.ru/feed/questions/osnovnye-ponyatiya-t...ii-veroyatnostey\_229](https://text.ru/rd/aHR0cHM6Ly93d3cuZGlzdGFuei5ydS9mZWVkL3F1ZXN0aW9ucy9vc25vdm55ZS1wb255YXRpeWEtdGVvcmlpLXZlcm95YXRub3N0ZXlfMjI5)
17. [studfile.net/preview/5082668/](https://text.ru/rd/aHR0cHM6Ly9zdHVkZmlsZS5uZXQvcHJldmlldy81MDgyNjY4Lw%3D%3D)
18. [eoria-veroyatnostei.jimdofree.com/базовые-термины/](https://text.ru/rd/aHR0cHM6Ly90ZW9yaWEtdmVyb3lhdG5vc3RlaS5qaW1kb2ZyZWUuY29tL9Cx0LDQt9C%2B0LLRi9C1LdGC0LXRgNC80LjQvdGLLw%3D%3D)
19. [studopedia.ru/19\_362125\_klassifikatsiya-sobitiy-de...-nad-sobitiyami.html](https://text.ru/rd/aHR0cHM6Ly9zdHVkb3BlZGlhLnJ1LzE5XzM2MjEyNV9rbGFzc2lmaWthdHNpeWEtc29iaXRpeS1kZXlzdHZpeWEtbmFkLXNvYml0aXlhbWkuaHRtbA%3D%3D)
20. [file:///C:/Users/user/Downloads/%D0%91%D0%B8%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%8F.%20%D0%9F%D0%BE%D1%81%D0%BE%D0%B1%D0%B8%D0%B5-%D1%80%D0%B5%D0%BF%D0%B5%D1%82%D0%B8%D1%82%D0%BE%D1%80\_%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D1%81%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B2%20%D0%A1.%D0%98\_2016%20-538%D1%81.pdf](file:///C%3A%5CUsers%5Cuser%5CDownloads%5C%D0%91%D0%B8%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%8F.%20%D0%9F%D0%BE%D1%81%D0%BE%D0%B1%D0%B8%D0%B5-%D1%80%D0%B5%D0%BF%D0%B5%D1%82%D0%B8%D1%82%D0%BE%D1%80_%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D1%81%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B2%20%D0%A1.%D0%98_2016%20-538%D1%81.pdf)
21. [vuzlit.ru/828146/teoriya\_veroyatnostey](https://text.ru/rd/aHR0cHM6Ly92dXpsaXQucnUvODI4MTQ2L3Rlb3JpeWFfdmVyb3lhdG5vc3RleQ%3D%3D)

25.08.2020

Гордеев Е.Р.