**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ**

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ**

Выполнила: Лось Мария, учащаяся 9«Б» класса

Руководитель: Лось Т. Н., учитель математики

Государственное учреждение образования «Гимназия г. Иваново»

В современном мире всё стремительно меняется. Это касается и самой «старой» науки – математики. На уроках геометрии мы изучаем окружности, параллелограммы, треугольники, квадраты и т.д. Однако в природе большей частью объекты «неправильные» – шероховатые, зазубренные, изъеденные ходами и отверстиями.

Мы задались вопросом: «К классу, каких геометрических фигур можно все это отнести?» Оказалось, что фракталы – подходящие средства для исследования поставленных вопросов.

Фрактальная геометрия относительно новая научная дисциплина. С помощью фрактальной теории возможно точно описать многие «неправильные» формы, встречающиеся в окружающем мире, например, береговую линию, форму облака и горного массива, ритм сердечных сокращений, ветвление сосудов в организме и речных дельт. Фрактальная геометрия помогает лучше понять многие явления с математической точки зрения [1].

В своей работе я показала, как можно применять понятие фрактала в математике, а именно при нахождении площади и периметра.

**Первое определение фракталам дал Б. Мандельброт. Фракталом он назвал структуру, состоящую из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.**

Говоря простым языком, фрактал – это геометрическая фигура, определенная часть которой повторяется снова и снова, изменяясь в размерах [2].

Сначала изображается *основа*. Затем некоторые части основы заменяются на *фрагмент*. На каждом следующем этапе части уже построенной фигуры, аналогичные замененным частям основы, вновь заменяются на фрагмент, взятый в подходящем масштабе. Всякий раз масштаб уменьшается. Меняя основу и фрагмент, можно получить много разных геометрических фракталов.

Геометрические фракталы хороши тем, что, с одной стороны, являются предметом достаточного серьезного научного изучения, а с другой стороны, их можно «увидеть» — даже человек, далекий от математики, найдет в них что-то для себя. Вручную получить хороший фрактал практически невозможно. Поэтому я использовала для создания программу PasсalABC. Фрактальная графика является вычисляемой. Основное внимание уделяется не заданию изображения в виде совокупности простых геометрических фигур (прямых, многоугольников, окружностей, многогранников и пр.), а описанию алгоритма построения изображения – фрактальное изображение строится по уравнению или системе уравнений, и никакие объекты в памяти компьютера не хранятся.

Общий порядок исследования фракталов:

1. Поэтапное построение геометрических фракталов.

2. Расчет периметра и площади фигур на каждом шаге итерации. Выявление закономерностей при расчете.

3. Выводы.

Строим геометрический фрактал «Снежинку Коха» и для каждого шага итерации n в соответствии с рисунком выводим формулу расчета итогового периметра Pn= $\frac{a}{3^{n-1}}4^{n}$: Р0 = 3а, Р1 = а/3\*4\*3,

Р2 =а/32\*42\*3, Р3 =а/33\*43\*3, Р4 =а/34\*44\*3 и т.д.

Для расчета периметра и площади фрактала «Снежинка Коха» на любом шаге итерации использовалась программа Excel. За первые 4 шага итерации, периметр увеличился – примерно в 2,4 раза. За первые 20 шага – примерно в 315 раз. По сравнению с другими фракталами, периметр снежинки Коха растет довольно медленно.

Площадь фрактала активно увеличивается на 1–2 шаге итерации, далее рост существенно замедляется с каждым шагом. Пусть сторона исходного правильного треугольника равна *a*. Тогда его площадь Сначала сторона равна 1, а площадь: . Что происходит при увеличении итерации? Можно считать, что к уже имеющемуся многоугольнику пристраиваются маленькие равносторонние треугольники. В первый раз их всего 3, а каждый следующий раз их в 4 раза больше чем было в предыдущий. То есть на *n*-м шаге будет достроено *Tn* = 3 · 4*n*–1 треугольников. Длина стороны каждого из них составляет треть от стороны треугольника, достроенного на предыдущем шаге. Значит, она равна (1/3)*n*. Площади пропорциональны квадратам сторон, поэтому площадь каждого треугольника равна . При больших значениях *n* это, кстати, очень мало. Суммарный вклад этих треугольников в площадь снежинки равен *Tn* · *Sn* = 3/4 · (4/9)*n* · *S*0. Поэтому после *n*-го шага площадь фигуры будет равна сумме *S*0 + *T*1 · *S*1 + *T*2 · *S*2 + ... +*Tn* · S*n* = . Снежинка получается после бесконечного числа шагов, что соответствует *n* → ∞. Получается бесконечная сумма, но это сумма убывающей геометрической прогрессии, для нее есть формула: . Площадь снежинки равна .

Строим геометрический фрактал «Ковер Серпинского». В квадрате каждую из сторон делим на три равные части. Соответственно весь квадрат поделится на девять одинаковых квадратиков со стороной равной 1/3 от исходной длины. Из исходной фигуры вырезаем центральный квадрат. Затем такой же процедуре деления и вырезания подвергается каждый из 8 оставшихся квадратиков и далее процесс повторяется. При построении для каждого шага итерации n выводим формулы расчета периметра Рn= P0+ 23n-1 \*(a/3n) и площади Sn= S0 – (a/3n)\*23n-3. Для автоматизированного расчета периметра и площади фрактала «Ковер Серпинского» на любом шаге итерации использовалась программа Excel. Площадь такого ковра практически равна нулю, а общий периметр всех пустот становится огромным и стремится к бесконечности. Если сравнивать наглядные изображения треугольника и ковра, то можно увидеть принципиальное различие между фракталами: в треугольнике все пустоты пересекаются (касаются) друг с другом в точках и расползаются дальше, а ковровые пустоты не имеют между собой ничего общего – каждая пустота «самостоятельна» и не соприкасается с другой.

Также я рассмотрела собственную фрактальную фигуру, состоящую из кругов и определила площадь фрактальной фигуры, полученной последовательным добавлением к данному кругу радиуса 1 кругов радиусов ½, ¼, и т.д. и нашла площадь данной фрактальной фигуры после 4-ой иn-ой итерации: $S\_{0}=πR^{2}$; $S\_{1}=S\_{0}+π(\frac{R}{2})^{2}\*4==πR^{2}+\frac{4πR^{2}}{4}=2πR^{2}$; $S\_{2}=S\_{1}+π(\frac{R}{4})^{2}\*12=2πR^{2}+\frac{12πR^{2}}{16}==πR^{2}(2+\frac{3}{4})$; $S\_{3}=S\_{2}+π(\frac{R}{8})^{2}\*36=πR^{2}(2+\frac{3}{4})+\frac{36πR^{2}}{64}==πR^{2}(2+\frac{3}{4}+ +\frac{3^{2}}{4^{2}})$; $S\_{4}=S\_{3}+π(\frac{R}{16})^{2}\*108=πR^{2}(2+\frac{3}{4}++\frac{3^{2}}{4^{2}})+\frac{108πR^{2}}{256}=πR^{2}(2++\frac{3}{4}+\frac{3^{2}}{4^{2}}+\frac{3^{3}}{4^{3}})$;

$S\_{n}=πR^{2}(1+1+\frac{3}{4}+\frac{3^{2}}{4^{2}}+\frac{3^{3}}{4^{3}}+…+\frac{3^{n+1}}{4^{n+1}})$. Увеличение площади заметно по 7-ую итерацию, а затем увеличение незначительно.