Муниципальное Бюджетное Общеобразовательное Учреждение

«Школа № 16»

**ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ**

Методы решения функциональных уравнений

|  |
| --- |
| Работу выполнила: Лаврентьева Дарьяученица 10 «А» класса |
| Руководитель: учитель математики Саленик О.В. |

Рязань

2022

Оглавление

[Введение 3](#_Toc92404520)

[Глава 1. Теоретические аспекты методов решения функциональных уравнений 5](#_Toc92404521)

[§ 1. История развития решений функциональных уравнений 5](#_Toc92404522)

[§ 2. Понятие и виды функциональных уравнений 7](#_Toc92404523)

[Глава 2. Основные методы решения функциональных уравнений 9](#_Toc92404524)

[§ 1. Метод подстановки 9](#_Toc92404525)

[§ 2. Метод Коши 11](#_Toc92404526)

[§ 3. Метод итераций (последовательных приближений) 14](#_Toc92404527)

[§ 4. Метод касательных 18](#_Toc92404528)

[Заключение 22](#_Toc92404529)

[Список литературы 23](#_Toc92404530)

## Введение

***Актуальность проекта***. Одним из важнейших математических умений, которым должны овладеть обучающиеся при изучении школьной программы – это умение решать уравнения. Они одновременно могут являться задачами и способами их решения. Корень уравнения можно найти в одно или более действий, многие текстовые задачи решаются алгебраическим способом, в уравнении могут участвовать целые, рациональные и другие числа. Так, во время решения тренировочных заданий мне попалось уравнение, которое я решить не смогла. Как я узнала позже от учителя, это было функциональное уравнение.

Что же такое функциональные уравнения? И какие способы их решения существуют? Эти вопросы заинтересовали меня, и я решила написать проектную работу

Функциональные уравнения являются одним из старых разделов математического анализа. В курсе школьной математики изучаются основы математического анализа, но функциональные уравнения – нет. При решении олимпиадных задач часто встречаются такие примеры. В настоящее время существует небольшое количество пособий, обучающих решению функциональных уравнений. Именно это обстоятельство определяет актуальность написания данной работы.

Исходя из актуальности темы работы, мною сформулирована ***цель*** исследования: изучить, что является функциональным уравнением и узнать основные методы их решения, что поможет нам, учащимся, использовать их при решении соответствующих задач.

В соответствии с целью были сформулированы ***задачи*** проектной работы:

1) подбор и анализ научной литературы;

2) изучение истории развития решений функциональных уравнений.

3) анализ понятия и видов функциональных уравнений;

4) изучение основных методов решения функциональных уравнений.

***Объект:*** решение уравнений.

***Предмет:*** решение функциональный уравнений

В соответствии с целью, задачами мною сформулирована ***гипотеза*** проектной работы: представляется, что малое количество информации о решении функциональных уравнений предполагает детальное изучение и рассмотрение этой части раздела математического анализа, а так же составлению перечня методов решения функциональных уравнений.

## Глава 1. Теоретические аспекты методов решения функциональных уравнений

## § 1. История развития решений функциональных уравнений

Функциональное уравнение – это уравнение, которое содержит одну или несколько неизвестных функций (с заданными областями определения и значений). Решить функциональное уравнение – значит найти все функции, которые тождественно ему удовлетворяют. Функциональные уравнения возникают в самых разных областях математики, обычно в тех случаях, когда требуется описать все функции, обладающие заданными свойствами.

Например: *f(x+3)-4f(x+1)+f(х)=0* и *f(x+y)=f(x)+f(y),* где *f* – неизвестная функция, *х* и *у* – независимые переменные. В обоих уравнениях неизвестной является функция одной переменной, но во втором уравнении фигурируют две независимых переменных, одна из которых является свободной, в данном случае *у*.

Некоторые функциональные уравнения знакомы нам из школьного курса 9 класса. Это такие уравнения: *f(x)=f(-x), f(-x)=-f(x), f(x+Т)= f(x)*, которые задают такие свойства функций, как чётность, нечётность, периодичность.

Функциональные уравнения являются одним из старых, но до сих пор недостаточно изученных разделов математического анализа.

Проблема решения функциональных уравнений появилась одновременно с зарождением теории функций и классического математического анализа. Еще до 1980-х гг. ХХ столетия ранняя история функциональных уравнений была совершенно неизвестна. Изучая труды математиков П.С. Лапласа и Г. Монжа, гораздо позднее ученые обратили внимание на то, что их подходы к решению задач относятся к функциональным уравнениям.

В 1769 году проблема параллелограмма сил привела Ж.Л. Даламбера (1717-1783) к решению функционального уравнения. Н.И. Лобачевский (1792-1856) получил формулу угла параллельности из функционального уравнения. Ряд важнейших функциональных уравнений был изучен норвежским математиком Н.Х. Абелем (1802-1829), который сводил их к дифференциальным уравнениям.

Английский математик Ч. Бэббидж (1791-1871) рассматривал решения некоторых геометрических задач с помощью функциональных уравнений.

Одними из простейших функциональных уравнений являются уравнения О.Л. Коши (1789-1857):

*f(x+y)=f(x)+f(y),*

*f(x+y)=f(x)*$ ∙$*f(y),*

*f(x*$∙$*y)=f(x)+f(y),*

*f(x*$∙$*y)=f(x)*$ ∙$*f(y),*

которые используются в различных разделах математики и, в частности, могут быть положены в основу определения элементарных функций. Их принято называть уравнениями Коши. Его метод решения функциональных уравнений, который в настоящее время носит его имя, будет рассмотрен в одной из частей проектной работы.

В классе разрывных функций могут быть и другие решения. Уравнение *f(x+y)=f(x)+f(y)* ранее рассматривалось А.М. Лежандром (1752-1833) и К.Ф. Гауссом (1777-1855) при выводе основной теоремы проективной геометрии и при исследовании гауссовского закона распределения вероятностей.

Г. Дарбу (1842-1917) применял функциональные уравнения к проблеме параллелограмма сил. Его главное достижение – значительное ослабление предположений. Функциональное уравнение О.Л. Коши характеризует в классе непрерывных функций линейную однородную функцию *f(x)=ах.* Г. Дарбу же показал, что всякое решение, непрерывное хотя бы в одной точке или же ограниченное сверху (или снизу) в произвольно малом интервале, также должно иметь вид *f(x)=ах.* Дальнейшие результаты по ослаблению предположений следовали быстро один за другим (интегрируемость, измеримость на множестве положительной меры и даже мажорируемость измеримой функцией).

Первый пример отличного от f(x)=ах. разрывного решения функционального уравнения *f(x+y)=f(x)+f(y)* построил в 1905 году немецкий математик Г.К. Гамель (1877-1954) с помощью введённого им базиса действительных чисел. Многие функциональные уравнения не определяют конкретную функцию, а задают широкий класс функций, т. е. выражают свойство, характеризующее тот или иной класс функций.

Таким образом, крупнейшие математики неоднократно обращались к функциональным уравнениям и уделяли много внимания разработке их решения.

## § 2. Понятие и виды функциональных уравнений

Прежде, чем перейти к рассмотрению методов решения функциональных уравнений, рассмотрим основные понятия теории функциональных уравнений.

Л.М. Лихтарников предлагает следующее определение функционального уравнения: функциональным уравнением называют уравнение, в котором неизвестная функция связана с известными функциями с помощью операции композиции[[1]](#footnote-1).

Например, для функции *f(x)=*$\frac{2x+3}{3x+1}$композиционной является функция

*f(f(x))=*$\frac{2∙\frac{2x+3}{3x+1}+3}{3∙\frac{2x+3}{3x+1}+1}=\frac{4x+6+9x+3}{6x+9+3x+1}$ = $\frac{13x+9}{9x+10}$.

Функция *f(x)* называется решением функционального уравнения, если она, будучи подставленной в уравнение вместо неизвестной функции, обращает его в тождество. Например, решением уравнения

*f(x*$∙$*y)=f(x)*$ ∙$*f(y)*

является степенная функция *f(x)=хр,* где *p* – любая постоянная.

Решением уравнения

*f(x+2)–5f(х+1)+6f(x)=0*

является функция *f(x)=k1*$∙$*3х+ k2*$∙$*2х,* где *k1*  и *k2* – произвольные постоянные.

И, наконец, решением уравнения

*f(* $\frac{х+1}{х-1}$*)= f(x)*

при *х*$\ne $*1* является функция *f(x) = Ф(*$\frac{x²+1}{х-1}$*),* где Ф – произвольная функция.

Из этих примеров видно, что степень общности решения функциональных уравнений может быть различной. Так, в первом примере решение уравнений зависит от произвольной постоянной *р*, во втором – от двух произвольных постоянных *k1* и *k2*, а в третьем примере решение зависит от произвольной функции Ф.

Если решение функционального уравнения содержит произвольные переменные или произвольные функции, то придавая этим постоянным функциям различные значения, мы будем получать различные решения уравнения, которые называются *частными решениями*.

Существует несколько видов функциональных уравнений:

1. Функциональные уравнения, не содержащие свободных переменных (параметра):
* в классе непрерывных функций;
* в классе дифференцируемых функций;
* в классе функций натурального аргумента.
1. Функциональные уравнения, содержащие свободные переменные.

Следует упомянуть тот факт, что с этим видом уравнений математики встретились в первую очередь. К ним относятся упомянутые выше уравнения Ж.Л. Даламбера, О.Л. Коши и Н.И. Лобачевского.

Подводя итог, следует отметить, что существует большое разнообразие функциональных уравнений, и они могут быть различной степени сложности. Более того, в теории функциональных уравнений в отличие от других математических теорий известно не очень много методов их решения. Этому вопросу посвящена следующая глава.

## Глава 2. Основные методы решения функциональных уравнений

Не смотря на то, что каждая задача с функциональным уравнением имеет своеобразный подход к ее решению, все же можно выделить некоторые группы уравнений, объединенных общей идеей решения, основанной на том или ином математическом методе. Рассмотрим методы решения функциональных уравнений.

## § 1. Метод подстановки

Этот метод состоит в том, что переменные заменяются некоторыми новыми функциями (возможно константами), что позволяет привести уравнение к более удобному виду. В отдельных случаях новое уравнение легко решается. В одном решении допускается делать несколько подстановок и комбинировать уравнения. Рассмотрим это на примере.

Пример № 1.

Найти функцию *f(x)*, определенную при всех действительных *х*$\ne $*а[[2]](#footnote-2), х*$\ne $*0* и удовлетворяющую уравнению

*(а–х) f (х) – 2хf (а–х) =* 1. (1)

Если такая функция существует, то вместо *х* можем подставлять в уравнение (1) любое выражение, имеющее смысл на области определения функции. Нетрудно догадаться, что наиболее удобной будет замена *х* = *а–х*

*хf(а–х)–*2*(а–х)f(х)=*1, (2)

которое содержит те же самые функции *f(x)* и *f(а–x).* Решая (1) и (2) как систему относительно неизвестных *f(x)* и *f(а–x)*, получим

*f(x)=* $ \frac{1}{х-а} $*, х*$\ne $*0.*

Проверкой убеждаемся, что эта функция удовлетворяет условию задачи:

*(а–х)* $ \frac{1}{х-а}$ *– 2х* $ \frac{1}{а-х-а}$ *= 1.*

Сущность метода, использованного при решении этой задачи, заключается в следующем. Предполагаем, что уравнение имеет решение. Применяем к переменным, входящим в функциональное уравнение, некоторые подстановки. Получаем систему уравнений, одним из неизвестных которой является искомая функция. После решения системы непосредственной проверки необходимо убедиться. Что найденная функция удовлетворяет условиям задачи.

Основная трудность при использовании этого метода состоит в подборе удачных подстановок.

Пример № 2.

Необходимо решить функциональное уравнение:

*f(x)+ 2 f* ($ \frac{1}{х} $)*=3х (х*$\ne $*0).*

Решение. Заменим *у =* 1*/х.*  Тогда

*f* ( $\frac{1}{у}$ ) + *2 f(у)=* $\frac{3}{у}$и

*f(у)+* 2 *f(* $\frac{1}{у}$ *)=3у.*

Отсюда *f(у) =* $\frac{2}{у}$ *– у.*

Таким образом, применяя различные подстановки (т. е заменяя некоторые переменные функционального уравнения либо конкретными значениями, либо какими-либо другими выражениями), мы пытаемся либо упростить это уравнение, либо привести его к такому виду, что дальнейшее решение станет очевидным. В задачах, решаемых таким методом, очень часто не указывается класс функций, в котором решение ищется. В таких случаях предполагается, что нужно найти все решения без всяких ограничений (непрерывные, разрывные и т. д.). Особенность применяемого метода как раз и состоит в том, что в ряде случаев он позволяет отыскать решения в классе всевозможных функций. При использовании метода подстановок, решение может иногда выглядеть громоздким и сложным при вычислении и преобразовании, но, тем не менее, он применяется часто.

## § 2. Метод Коши

Метод Коши применяется к функциональным уравнениям, содержащим свободные переменные, в том случае, когда решение ищется в классе непрерывных функций.

Пример № 1.

Найдите функцию *f(x),* определённую на множестве натуральных чисел, удовлетворяющую условию *f(x+1) = f(x) + d,*  где *d* некоторое действительное число.

Решение.

Найдём выражения для *х* = 1, 2, 3, … Получим

*f(2) = f(1) + d,*

*f(3) = f(2) + d = f(1) + d + d = f(1) + 2 d,*

*f(4) = f(3) + d = f(1) + 2d + d = f(1) + 3d.*

Этот «эксперимент» подсказывает, что *f(n) = f(1) + (n-1)d,* где *n* $\in $ *N.*

Проверим, действительно ли выполняется равенство *f(x) = f(1) + (х–1)d,* где *х* $\in $ *N.* Применим для доказательства метод математической индукции.

Проверим, выполняется ли равенство при *х=1 : f(1) = f(1) –* верно.

Предположим, что равенство верно при *х = n – 1,* где *n* $\in $ *N,* где *n* $⩾$ *2,
n* $\in $ *N,* т.е. *f(n) = f(1) + (n-1)d* – верно.

Докажем, что из этого следует равенство для *х = n.* Так как *f(x+1) = f(x) + d,*  то при *х = n* получим *f(n +1) = f(n) + d* или

*f(n +1) = f(1) + (n–1)d + d*

*f(n +1) = f(1) + nd.*

Значит, равенство верно для любого натурального *n*. Таким образом, решением заданного функционального уравнения будет функция

*f(x) = f(1) + (х–1)d*, где *f(1)* произвольное число.

Пример № 2 (аддитивное уравнение Коши).

Найдите все непрерывные функции, удовлетворяющие условию

*f(x+y)=f(x)+f(y).*

Решение.

Будем находить решение функционального уравнения постепенно, т.е. сначала найдём его решение, если *х* является натуральным числом, затем – целым, потом рациональным и, наконец, – действительным.

Пусть *у = х.* Тогда *f(2х) = 2f(х).*

При *у = 2х, 3х, …,* получим

*f(3х) = 3 f(х), f(4х) = 4 f(х), …*

Таким образом, в результате получаем  *f(nх) = nf(х).*

При *х = 1* получим *f(n) = n* $∙$ *f (1),* где *f (1)* постоянное число. Обозначим его через *k1.* Значит, для *n* $\in $ *N,* имеем *f(x) = k1* $∙$*х.*

Положим в равенстве

*х =* $\frac{m}{n}$*,* где $\frac{m}{n}$ > 0, получим *f(m) = n* $∙$ *f(* $\frac{m}{n}$ *).*

Отсюда *f (* $\frac{m}{n}$ *) =* $\frac{1}{n}$$∙$ *f(m)* или *f (* $\frac{m}{n}$ *) =* $\frac{m}{n}$$∙$$\frac{1}{m}$$∙$ *f(m).*

Обозначив $\frac{1}{m}$ $∙$ *f(m),* через *k2,* получим *f (* $\frac{m}{n}$ *) =* $\frac{m}{n}$$∙$ *k2.*

Значит при положительном и рациональном *х* мы получим *f(x) = k 2* $∙$ *x.*

Предполагая, что функция *f(x)* непрерывна, получим *f(x) = k* $∙$ *х,*при *х* $\in $ *R, x* > 0.

Возьмем в этом равенстве *у = –х.* Тогда *f(x–х)=f(x)+f(–х)*

Получим *f(0)[[3]](#footnote-3) = f(x) + f(–x)* или *f(–x) = – f(x).*

Так как *f(x) = kх,* то *f(–x) = –kx,* т.е. *f(–x) = k3 x.*

Итак, для любого действительного решением уравнения будет функция

*F(x) = k х.*

*f(x+y)=f(x)+f(y) –* уравнение называется аддитивным уравнением Коши. Его решением является линейная функция.

Пример № 3.

Найдите непрерывные функции *f(x),* удовлетворяющие условию

*f (* $\frac{x+y}{2}$ *) =* $\frac{f(x)}{2}$ *+* $\frac{f(y)}{2}$*. (1)*

Решение:

Попробуем свести это уравнение к функциональному уравнению Коши *f(x+y)=f(x)+f(y)* с непрерывным решением *f(x) = kх.*

Пусть *у=0,*  тогда *f (* $\frac{x}{2}$ *) =* $\frac{f(x)}{2}$ *+* $\frac{f(0)}{2}$*.*

Так как *f(0) –* постоянное число, обозначим его через *k1* и получим
*f (* $\frac{x}{2}$ *) =* $\frac{f(x)}{2}$ *+* $\frac{k1}{2}$*.*

Придадим теперь *х* значение  *х + у.*

Получим *f (* $\frac{x+y}{2}$ *) =* $\frac{f(x+y)}{2}$ *+* $\frac{k1}{2}$*.*

Из уравнения *(1)* *f (* $\frac{x+y}{2}$ *) =* $\frac{f(x)}{2}$ *+* $\frac{f(y)}{2}$получим

$\frac{f(x)}{2}$ + $\frac{f(y)}{2}$ = $\frac{f(x+y)}{2}$ + $\frac{k1}{2}$ или *f(x+y) = f(x) + f(y) + k1. (2)*

Решением уравнения *f(x+y) = f(x) + f(y)*  является функция *y = k* $∙$ *x.*

Значит, решением уравнения *(2)* будет функция *y = k* $∙$ *x + k1.*

Коши доказал, что для функционального уравнения вида *f(x+y)=f(x)+f(y)* решением будет линейная функция, проходящая через ноль. Так же стоит отметить, что для уравнений

*f(x+y)=f(x)*$ ∙$*f(y)*

*f(x*$∙$*y)=f(x)+f(y)*

*f(x*$∙$*y)=f(x)*$ ∙$*f(y),*

решениями соответственно являются элементарные функции: показательная, логарифмическая и степенная.

Таким образом, суть метода заключается в постепенном отыскании решения функционального уравнения (вначале на множестве натуральных чисел, затем, с помощью математической индукции, на множестве целых, рациональных и, в заключение, действительных чисел).

## § 3. Метод итераций (последовательных приближений)

Метод итераций применим для отыскания корней функционального уравнения

*х = F(x).*

Введем для этого уравнения понятие итерационной последовательности.

Последовательность чисел *х0, х1, …, хn,* коротко обозначаемую символом *{хn},* будем называть *итерационной,* если для любого номера *n* $\geq $*1* элемент *хn* выражается через элемент *хn-1* по рекуррентной формуле
*хn = F(xn-1)*, а в качестве *х0* взято любое число из области задания функции *F(x).*

Мы установим, что при определенных условиях итерационная последовательность *{xn}* сходится к корню уравнения *х = F(x)* и поэтому ее элементы могут быть взяты за приближенные значения этого корня.

*Теорема 1.* Если функция *F (x)* непрерывна в каждой точке сегмента
*a* $\leq $ *x* $\leq $ *b*, все элементы итерационной последовательности *{xn}* лежат на этом сегменте и итерационная последовательность сходится к некоторому пределу *"c"*, то *"c"* является корнем уравнения *х = F(x)*.

Доказательству теоремы 1 предпошлем следующее вспомогательное утверждение.

*Лемма.* Если последовательность *{xn}* сходится к пределу *"c"* и все элементы этой последовательности лежат на сегменте *a* $\leq $ *x* $\leq $ *b*, то и предел *"c"* лежит на этом сегменте.

Пусть *{xn}* сходится к пределу *c* и все элементы *xn* удовлетворяют неравенству *xn* $\leq $ *b* (соответственно *xn* $\geq $ *a*). Требуется доказать, что и предел *c* удовлетворяет неравенству *c* $\leq $ *b* (соответственно *c* $\geq $ *a*).

Остановимся на случае *xn* $\leq $ *b*, ибо случай *xn* $\geq $ *a* рассматривается аналогично. Положим *yn = xn – b* и заметим, что последовательность *{yn}* состоит из неположительных чисел и сходится к пределу *d = c – b*. Достаточно доказать, что этот предел *d* неположителен. Предположение о том, что этот предел положителен, приводит к противоречию с тем, что все *yn* неположительны, ибо в силу сходимости *{yn}* к *d* все элементы *yn* , начиная с некоторого номера, будут как угодно мало отличаться от *d* и поэтому будут положительны.

Лемма доказана.

Переходя к доказательству теоремы 1, мы теперь в силу леммы можем утверждать, что предел c итерационной последовательности *{xn}* лежит на сегменте *a* $\leq $ *x* $\leq $ *b*. Отсюда следует, что функция *F(x)*, по условию непрерывная в каждой точке этого сегмента, является непрерывной в точке *c*. Так как последовательность *{xn}* сходится к *c*, то, по определению непрерывности функции, $\lim\_{n\to \infty }F(c)$=F(c).

Переходя теперь к пределу при n$ \rightarrow $ $\infty $ в равенстве *xn = F (xn–1)*, мы получим в пределе из этого равенства, что *c = F (c),* то есть c является корнем уравнения *х = F(x)*.

Теорема 1 доказана.

*Теорема 2.* Пусть число *"c"* является корнем уравнения *х = F(x)* и пусть в каждой точке некоторого симметричного относительно *"c"* сегмента *[c – ε, c + ε]*, где *ε* > 0, функция *F (x)* имеет производную *F '(x)* и эта производная всюду на этом сегменте удовлетворяет условию

| *F '(x)* | $\leq $ α < 1.

Тогда итерационная последовательность *{xn}*, у которой в качестве *x0*взята любая точка сегмента *[c – ε, c + ε]*, сходится к корню *"c"*. Более того, для *n*-го элемента итерационной последовательности *xn* справедливо неравенство

| *xn - c* | $\leq $ εαn.

*Замечание 1.* Операция, задаваемая функцией *F (x)*, удовлетворяющей неравенству | *F '(x)* | $\leq $ α < 1, называется *сжатием*.

*Замечание 2.* Неравенство | *xn - c* | $\leq $ εαn показывает, что итерационная последовательность *{xn}* сходится к корню *c* со скоростью геометрической прогрессии.

*Доказательство теоремы 2.* В силу теоремы 1 для доказательства первого утверждения теоремы 2 о сходимости итерационной последовательности *{xn}* к корню *c* уравнения *х = F(x)* достаточно доказать, что все элементы *xn* лежат на сегменте *[c – ε, c + ε]*.

Докажем это методом математической индукции. Так как по условию теоремы *x0*принадлежит сегменту *[c – ε, c + ε]*, то достаточно, предположив, что *xn* при *n* $\geq $ *0* принадлежит этому сегменту, доказать, что и *xn+1* ему принадлежит. Учитывая, что *xn+1* = *F (xn), c* = *F (c),* мы получим, что

*xn+1* – *c = F (xn) – F (c).*

Так как функция, имеющая производную в данной точке, является непрерывной в этой точке, то для функции *F (x)* на сегменте, ограниченном точками *c* и *xn*, выполнены все условия теоремы Лагранжа и по этой теореме между *c* и *xn* найдется такая точка *xn*, что справедлива формула Лагранжа

*F (xn) – F (c) = (xn - c)F '(xn).*

Из последних двух равенств и условия | *F '(x)* | $\leq $ α < 1, справедливого для производной во всех точках сегмента *[c – ε, c + ε]*, вытекает, что

*| xn + 1 - c |* $\leq $ *α | xn - c |.*

Из неравенств *| xn + 1 - c |* $\leq $ *α | xn - c |* и из того, что *α < 1*, вытекает, что

*| xn + 1 - c | < | xn - c |.*

Последнее неравенство означает, что точка xn + 1 лежит на меньшем расстоянии от *c*, чем точка *xn* , и так как *xn* лежит на сегменте *[c – ε, c + ε]*, то и *xn + 1* лежит на этом сегменте.

Итак, все элементы итерационной последовательности *{xn}* лежат на сегменте *[c – ε, c + ε]*, и первая часть теоремы 2 доказана.

Остается для любого номера *n* доказать неравенство | *xn - c* | $\leq $ εαn. Записывая неравенство *| xn + 1 - c |* $\leq $ *α | xn - c |* для номеров *n*, равных *0, 1, 2,* …, *n - 1*, получим, что

*| xn  - c |* $\leq $ *αn | x0 - c* | $\leq $ εαn*.*

Теорема 2 полностью доказана.

Сделаем практические замечания относительно применения только что доказанной теоремы. Предположим, что путем предварительной прикидки мы установили, что интересующий нас корень c уравнения *х = F(x)* лежит внутри некоторого сегмента [*a, b*], на котором функция *F(x)* имеет производную, удовлетворяющую условию | *F '(x)* | $\leq $ α < 1. Так как сегмент [*a, b*], вообще говоря, не является симметричным относительно вычисляемого корня *c*, то естественно возникает вопрос, как выбрать нулевое приближение *x0*, чтобы к итерационной последовательности *{xn}* была применима теорема 2. Заметим, что, где бы внутри сегмента [*a, b*] ни располагался корень *c*, хотя бы один из двух симметричных относительно точки c сегментов [*a, 2c - a*] и [*2c - b, b*] целиком принадлежит сегменту [*a, b*]. Поэтому хотя бы одна из двух точек *a* и *b* принадлежит симметричному относительно *c* сегменту, всюду на котором справедливо неравенство
| *F '(x)* | $\leq $ α < 1, то есть хотя бы одну из точек *a* или *b* можно согласно теореме 2 выбрать в качестве нулевого приближения *x0* . Конкретно за *x0*нужно принять ту из точек *a* или *b*, для которой приближение *x1 = F (x0)* не выходит за пределы сегмента [*a, b*].

На практике чаще всего встречается случай, когда производная *F '(x)* имеет на сегменте [*a, b*] определенный знак. Если этот знак положителен, то из формул *xn+1* – *c = F (xn) – F (c)* и *F (xn) – F (c) = (xn - c)F '(xn)* вытекает, что итерационная последовательность *{xn}* является монотонной (то есть или не убывает, или не возрастает). Этот случай приводит к так называемой ступенчатой диаграмме, изображенной на рис. 1. Если же производная *F '(x)* отрицательна на сегменте [*a, b*], то из тех же формул вытекает, что два любых последовательных элемента *xn* и *xn + 1* лежат по разные стороны от *c*. Этот случай приводит к так называемой спиралеобразной диаграмме, изображенной на рис. 2.





Таким образом, мы познакомились с итерационным методом отыскания корней функционального уравнения *х = F(x).*

## § 4. Метод касательных

 Метод касательных является одним из самых эффективных приближенных методов вычисления корней уравнения *f (x) = 0.*

Пусть искомый корень c уравнения *f (x) = 0* расположен на сегменте [*a, b*]. Перейдем к описанию метода касательных, не выясняя пока условий, при которых этот метод применим. Обратимся к рассмотрению графика функции *f (x)* на сегменте [*a, b*] (рис. 3).



Примем за нулевое приближение искомого корня некоторое значение *x0*из сегмента [*a, b*] и обозначим через *B0* точку графика функции с абсциссой *x0* . Проведем через точку *B0* касательную к графику функции и возьмем в качестве первого приближения искомого корня абсциссу *x1* точки пересечения этой касательной с осью *Ox*. Далее проведем касательную к графику функции через точку *B1* с абсциссой *x1* и возьмем за второе приближение абсциссу *x2* точки пересечения этой касательной с осью *Ox*. Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим последовательность *x0, x1 , …. xn , …* приближенных значений этого корня.

В практических целях полезно получить рекуррентную формулу, выражающую *xn + 1* через *xn*. Для этого возьмем уравнение *Y - f (xn)* = *f '(xn)(x - xn)* касательной к графику функции в точке *Bn* и вычислим абсциссу *xn + 1* точки пересечения этой касательной с осью *Ox*. При этом, полагая *Y = 0*, получим

*xn + 1 =хn* – $\frac{f(xn)}{f '(xn)}$.

Формула определяет алгоритм метода касательных.

Заметим, что последовательность *{xn}*, определяемая соотношением *xn + 1 =хn* – $\frac{f(xn)}{f '(xn)}$, совпадает с итерационной последовательностью, определяемой соотношением *xn + 1 = F (xn)* для функции *F (x)*, имеющий вид

*F (x) = х*– $\frac{f(x)}{f '(x)}$

Справедливо следующее утверждение.

*Теорема 3.* Если точка *x = c* является корнем уравнения *f (x) = 0* и если функция *f (x)* в достаточно малой окрестности точки *"c"* имеет отделенную от нуля (то есть удовлетворяющую условию *| f '(x)|* $\geq $ *m > 0)* первую производную и ограниченную (то есть удовлетворяющую условию | f "(x) | $\leq $ M) вторую производную, то существует *ε > 0,* такое, что итерационная последовательность *xn + 1 =хn* – $\frac{f(xn)}{f '(xn)}$ , в котором за нулевое приближение *x0* взята любая точка сегмента [*c - ε, c + ε*], сходится со скоростью геометрической прогрессии к корню *x = c* уравнения *f (x) = 0.*

В силу теоремы 2 достаточно доказать, что для функции *F(x),* определяемой равенством *F (x) = х*– $\frac{f(x)}{f '(x)}$, при достаточно малом *ε* > 0 всюду на сегменте [*c - ε, c + ε*] справедливо неравенство | *F '(x)* | $\leq $ α < 1. Так как в силу *F (x) = х*– $\frac{f(x)}{f '(x)}$

*F '(x) = 1–*$\frac{[f'(x)]2–f(x)f''(x)}{[f'(x)]2}$ *=* $\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]2}$

то всюду в достаточно малой окрестности точки *c*

| *F '(x)* | $\leq $ $\frac{| f (x) | M}{m2}$.

Далее так как *f (c) = 0* и функция *f (x)* непрерывна в точке *c*, то можно фиксировать *ε* > 0 настолько малым, что при *c - ε* $\leq $ *x* $\leq $ *c + ε* функция *f (x)* будет удовлетворять неравенству | *f (x)* | $\leq $ $\frac{m2}{2M}$ .Из последнего неравенства и неравенства | *F '(x)* | $\leq $ $\frac{| f (x) | M}{m2}$ следует, что при *c - ε* $\leq $ *x* $\leq $ *c + ε*

| *F '(x)* | $\leq \frac{1}{2}<$ 1

Теорема 3 доказана.

В заключение применим метод касательных для приближенного вычисления корня целой степени *k* из числа *a > 0*. Заметим, что вычисляемый корень совпадает с корнем функции *f (x) = xk - a*.

Искомый корень заведомо является положительным, а в малой окрестности любого положительного числа выполнены все условия теоремы 3. Далее в силу того, что *f '(x) = kxk - 1*, рекуррентная формула *xn + 1 =хn* – $\frac{f(xn)}{f '(xn)}$ принимает вид

*xn+1 = xn –* $\frac{x\_{n}^{k} –a}{kx\_{n}^{k–1}}$

и после элементарных преобразований приводится к равенству

*xn+1 =*$\frac{k-1}{k}$*xn +* $\frac{a}{kx\_{n}^{k–1}}$*.*

Любое число *a > 0* можно представить в виде *a = 2lx*, где *l* - целое число, а *x* удовлетворяет неравенству $\frac{1}{2}$ $\leq x <1. $Взяв за нулевое приближение *x0* число *2[l / k]*, где символ *[l / k]* обозначает наибольшее целое число, содержащееся в дроби *l / k*, и сделав с помощью формулы *xn+1 =*$\frac{k-1}{k}$*xn +* $\frac{a}{kx\_{n}^{k–1}}$ всего четыре итерации, мы получим:

$\sqrt[2]{2}$ = 1,414213181,

$\sqrt[2]{3}$ = 1,732049942,

$\sqrt[2]{4}$ = 1,999999046,

$\sqrt[5]{2}$ = 1,148697853,

$\sqrt[10]{2}$ = 1,071773529.

Таким образом, в данном параграфе рассмотрен метод касательных, который изложен на базе метода итераций, рассмотренного в параграфе 3. Этот метод является одним из наиболее распространенных методов решения функционального уравнения *f(x) = 0.*

Подводя итог можно отметить, что при приведении примеров и методов решения функциональных уравнений не требовалось ничего, выходящего за рамки программы средней школы. Таким образом, рассмотренные методы можно применять при решении функциональных уравнений, если они встречаются в заданиях.

## Заключение

В данной работе были рассмотрены функциональные уравнения и некоторые способы их решения. В ходе работы мы убедились, что функциональные уравнения – это общий класс уравнений, в которых искомой является некоторая функция. К функциональным уравнениям по существу относятся дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, уравнения в конечных разностях. Под функциональным уравнением в узком смысле слова понимают уравнения, в которых искомые функции связаны с известными функциями одного или нескольких переменных при помощи операции образования сложной функции. Функциональное уравнение можно также рассматривать как выражение свойства, характеризующего тот или иной класс функций.

Проведя детальный анализ научной литературы, был составлен перечень методов решения функциональных уравнений, в который вошли следующие: метод подстановки; метод Коши, метод итераций (последовательных приближений) и метод касательных. Таким образом цель работы достигнута, задачи решены.

## Список литературы

1. Андреев А.А., Кузьмин Ю.Н.., Савин А.Н., Саушкин И.Н. Функциональные уравнения. – Самара: В мире науки, 1999. – 45 с.
2. Бродский Я. С., Слипенко А. К. Функциональные уравнения. – К.: Вища школа. Головное издательство, 1983. – 96 с.
3. Ильин В.А. Методы решения функциональных уравнений // Соросовский образовательный журнал.2001. № 2. с. 116-120.
4. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения.– СПб.: Лань, 1997. – 160 с.
5. Режим доступа : <https://www.youtube.com/channel/UCScdalRXOjv0Y2SVvG7wRTA/featured> / , свободный (дата обращения 06.01.2022).
1. Композицией функций *F* и *f* называется функция, которая отображает множество аргументов функции *f* на множество значений функции *F.* [↑](#footnote-ref-1)
2. *а –* свободная переменная*.* [↑](#footnote-ref-2)
3. Учитывая, что *f(nх) = nf(х),* при *n=0,* получим *f(0x) = 0f(x).* Тогда *f(0) =0.* [↑](#footnote-ref-3)