Министерство образования, науки и молодежи Республики Крым

Малая академия наук «Искатель»

О ФОРМУЛАХ ТИПА КАРДАНО ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 5-Й СТЕПЕНИ

Работу выполнила:

Балко Елена Сергеевна,

ученица МБОУ «Средняя общеобразовательная школа № 40 имени героя Советского Союза В. А. Скугаря» муниципального образования городской округ Симферополь

Научный руководитель:

Третьяков Дмитрий Вадимович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и функционального анализа ФГОУ ВО «КФУ имени В. И. Вернадского»

Симферополь – 2022

**Оглавление**

Вступление………………………………………………………………...………3

Основная часть…………………………………………………………..….……..5

1. Вспомогательные вычисления…………..........……………………..…..…….5

1.1 Извлечение кубического корня из единицы...……………….…….…..5

1.2 Извлечение корня 5-й степени из единицы ………..………….…..…..6

2. Уравнения 3-й степени...……………………………………...…….……...…..9

2.1. Нахождение решений уравнений 3-й степени. Формула Кардано…..9

2.2. Исследование формулы Кардано в зависимости от знака дискриминанта…………………………………………………………………...11

3. Уравнения 5-й степени……..…..…….…..…………………………………...14

3.1. Нахождение решений уравнения 5-й степени.………………………14

3.2. Исследование формулы типа Кардано в зависимости от знака дискриминанта…………………………………………………………………...16

3.3 Примеры решения уравнений 5-й степени определенного класса….18

Выводы………………………………………………………………..……….....21

Список использованных источников…………………………………………...22

**Вступление**

На сегодняшний день выведены явные формулы решения уравнений второй, третьей и четвертой степени. Однако остается открытым вопрос решения уравнений большей степени.

В 1764 году Л. Эйлер опубликовал мемуар «О решении уравнений любого порядка», в котором предложил представить решения алгебраических уравнений 5-ой степени в виде , однако нашел их только в двух частных случаях: , [3]. Теорема Абеля-Руффини, доказанная в 1799 году П. Руффини и исправленная и дополненная в 1824 году Н. Абелем, утверждает, что общее алгебраическое уравнение степени неразрешимо в радикалах [1]. Однако поиск формул для частных случаев продолжается до сих пор.

Несмотря на невозможность вывода общего точного решения, некоторые частные случаи разрешимых в радикалах уравнений допускают нахождение всех корней. На данный момент помимо указанных выше это однородные, возвратные уравнения, приводимые уравнения вида , а также уравнения, сводимые к уравнениям более низкой степени.

В данной работе рассматривается еще один класс алгебраических уравнений 5-й степени, для корней которых можно получить выражения через радикалы и, более того, исследовать структуру этих корней, исходя из знака дискриминанта.

**Актуальность работы:** пополнение базы уравнений 5-й степени, разрешимых в радикалах. Полученные формулы могут применяться для решения задач по физической химии, в частности, при расчёте констант равновесия.

**Цель исследовательской работы:** вывести формулу корней определенного класса алгебраических уравнений 5-й степени по принципу вывода формулы Кардано.

**Объектом исследования** выступает некоторый класс алгебраических уравнений 5-й степени.

**Предметом исследования** являются вид корней алгебраического уравнения определенного класса в зависимости от знака дискриминанта.

Поставленная цель предопределила решение следующих **задач**:

1. Ознакомиться с порядком вывода формулы Кардано для кубических уравнений и с исследованием этой формулы в зависимости от знака дискриминанта.
2. Определить класс уравнений 5-й степени, разрешимых в радикалах.
3. Вывести формулу типа Кардано для выделенного класса уравнений 5-й степени и исследовать её в зависимости от знака дискриминанта.
4. Рассмотреть иллюстрирующие примеры.

Достижение поставленных задач возможно при условии использования следующих **методов исследования**:

- аналитический метод решения уравнений и неравенств;

- метод динамической аналогии.

**Гипотеза** заключается в том, что вывод формулы типа Кардано для выделенного класса алгебраических уравнений 5-й степени возможен и что полученные корни этого уравнения имеют схожую с корнями уравнения 3-й степени структуру.

Работа состоит из вступления, основной части, заключения и списка литературы. Объем работы 23 страницы.

Для облегчения ориентации в работе используются ссылки на формулы, где сначала указывается номер главы, а затем номер формулы в главе (например, (2.3) – 2 глава 3 формула).

**Основная часть**

**Вспомогательные вычисления**

Обозначим через один из корней n-й степени из единицы.

**1.1 Извлечение кубического корня из единицы**

**I.**

**1 способ.**

По формуле Муавра [2], если некое число задано в тригонометрической форме, то при справедливо равенство

Обратно, если взять число то при n-я степень этого числа имеет ровно n различных значений:

,

Воспользовавшись равенством , представляем выражение выше как

 (1.1)

Ввиду выведенного равенства (1.1), получаем, помимо самой единицы, следующие значения :

(1.2)

 (1.3)

**2 способ.**

Найдём значение , основываясь на том, что

Так как *,* должно выполняться

 (1.4)

Решим квадратное уравнение на множестве комплексных чисел:

Получаем

**II.**

Обратим внимание на некоторые зависимости между и

 (1.5)

К тому же, и — взаимно сопряженные числа

 (1.6)

Выразим :

 (1.7)

**1.2 Извлечение корня 5-й степени из единицы**

**I.**

При n=5 по формуле (1.1) корни имеют вид

(1.8)

Так как и [4], по формуле синусов и косинусов двойных и тройных углов находим алгебраическое выражение полученных чисел:

(1.9)

**II.**

Между величинами и , , , аналогично с корнем 3-й степени из единицы устанавливаются следующие зависимости:

(1.10)

Если — корень пятой степени из единицы, то (считаем )

 (1.11)

Объединив это выражение вместе с выражениями (1.8) и (1.10), можно выразить и :

Отсюда

Аналогично выводим

Действительно, при подстановке значений и в выражение (1.11) последнее обращается в верное (как известно [5], , ). Тогда точные алгебраические выражения тригонометрических чисел и представляем следующим образом:

 (1.12)

 (1.13)

**III.**

Числа и являются взаимно сопряженными (считаем, что ). Докажем, что для любого натурального n, числа

,

взаимно сопряжены для любого фиксированного .

Воспользовавшись формулами синуса и косинуса суммы и разности углов, а также четностью и нечетностью функций, получаем

Как мы видим, мнимые части чисел отличаются знаком, значит,

 (1.14)

Кроме того, через тригонометрическое выражение , , , можно объяснить сопряженность следующих пар корней из единицы:

 (1.15)

**Уравнения 3-й степени**

**2.1 Нахождение решений уравнений 3-й степени. Формула Кардано**

Для нахождения корней уравнения 5-й степени для начала приведём метод решения уравнения 3-й степени.

Дано кубичное уравнение с коэффициентами, принадлежащими множеству комплексных чисел

 (2.1)

Проведём замену переменных :

После несложных преобразований получаем:

 (2.2)

Уравнение (2.2) не содержит квадрата неизвестного . Пусть и . Тогда выходит уравнение вида

 (2.3)

В дальнейшем будем рассматривать именно решение уравнения (2.3), так как вследствие замены переменных нахождение значений предполагает нахождение значений . По следствию из основной теоремы алгебры, рассматриваемое уравнение будет обладать тремя комплексными корнями.

Итак, пусть — первый действительный корень уравнения (2.3). Тогда справедливо:

Для того, чтобы выражение обращалось в ноль, достаточно и , или

 (2.4)

Заметим, что полученные равенства системы (2.4) являются формулами Виета квадратного уравнения относительно некоторой переменной :

Дискриминант уравнение относительно z равен . Тогда

Находим значения и соответственно

Отсюда первый действительный корень уравнения можно выразить как

 (2.5)

Формула (2.5) называется формулой Кардано и выражает корни уравнения (2.3) через кубические и квадратные радикалы.

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа в любом случае возможно и даёт n различных значений. Поэтому и имеют каждый по 3 значения, каждое из которых однозначно соответствует второму для выполнения условий системы (2.4). Заметим, что из следует, что все значения корня n-й степени из комплексного числа получаются умножением одного из этих значений на все корни n-й степени из единицы. Тогда получаем пары

Исходя из вышенаписанного, представим все решения кубического уравнения:

 (2.6)

**2.2 Исследование формулы Кардано в зависимости от знака дискриминанта**

В рассматриваемом неполном кубическом уравнении большую роль имеет дискриминант. Под словом дискриминант будем подразумевать выражение , находящееся в формуле Кардано (2.5).

В этом случае под квадратным радикалом в формуле Кардано стоит отрицательное число, значения и принадлежат множеству комплексных чисел. Однако уравнение (2.3) в любом случае должно иметь хотя бы один действительный корень, так как их нечетное количество. Пусть это будет

.

По условию (2.4) сумма и произведение и есть действительное число (кубическое уравнение рассматривается с действительными коэффициентами). Тогда и — сопряженные числа, и остальные два корня также являются действительными:

Так, при кубическое уравнение имеет 3 действительных корня.

При D=0 обращается в ноль и тогда и приобретают вид

Заметим, что, ввиду принадлежности коэффициентов уравнения множеству действительных чисел, и могут принимать только действительные значения. Руководствуясь выражением (2.6), получаем следующий вид действительных корней, два из которых оказываются равными между собой

Руководствуясь выражением (1.7), доказывающим, что , получаем 3 действительных корня, два из которых равны между собой:

Под знаком каждого из кубических радикалов оказывается действительное число, поэтому на множестве комплексных чисел будет 1 действительный и 2 сопряженных комплексных корня. Пусть – действительное значение. Заменим в формулах (2.6) корни из единицы алгебраическими выражениями (1.2) и (1.3), тем самым выразив оставшиеся два корня уравнения:

**Уравнения 5-й степени**

**3.1 Нахождение решений уравнения 5-й степени.**

Определим класс разрешимых в радикалах уравнений 5-й степени c действительными коэффициентами p и q:

 (3.1)

Подобно нахождению решений уравнений 3-й степени, будем искать решения уравнения (3.1) в виде , где – первый действительный корень, то есть:

Отсюда

 (3.2)

Выберем и таким образом, чтобы . Тогда равенство (3.2) примет вид . Отсюда получаем 2 условия на и :

Возведем обе части последнего уравнения в 5-ю степень:

 (3.3)

Представленные в системе (3.3) условия являются не чем иным, как формулами Виета для уравнения

Найдём корни уравнения относительно z с дискриминантом , а затем значения и :

Тогда первый действительный корень уравнения (3.1) можно представить в следующем виде

 (3.4)

Выражение (3.4) будем называть формулой типа Кардано, так как она была выведена подобным формуле Кардано (2.5) образом. В отличие от (2.5), формула (3.4) выражает корни уравнения не через кубические радикалы, а через радикалы 5-й степени.

Найдём и остальные удовлетворяющие системе (3.3) четыре значения и путём умножения имеющегося на все значения корня 5-й степени из единицы, отличного от единицы:

Отсюда получаем следующие значения корней рассматриваемого уравнения:

 (3.5)

**3.2 Исследование формулы типа Кардано в зависимости от знака дискриминанта**

Дискриминантом в уравнении 5-й степени вида будем называть сумму значений под знаком корня выражения (3.4) .

Исследуем, как будут менять вид корни рассматриваемого уравнения в зависимости от его знака.

Первый корень (3.4) уравнения (3.1) можно представить несколько иным способом

,

где .

Вследствие доказанного равенства (1.14)

То есть мнимые части при сложении и сокращаются, и значение – действительное число.

Из формулы (3.5) и из равенства следуют следующие соотношения:

(3.6)

*,*

то есть, в случае все корни уравнения (3.1) – вещественные и попарно различные.

В этом случае и будут равны , или . Опираясь на это равенство, представляем систему (3.5) несколько иначе:

Пользуясь алгебраическим представлением суммы разных степеней (1.12) и (1.13), получаем 3 различных действительных корня, два из которых имеют кратность 2:

 (3.7)

Под знаком каждого из радикалов стоит действительное число, а извлечение корня 5-й степени из действительного числа есть 1 действительное и 2 пары комплексно-сопряженных чисел (следует из (1.15)). Подставив алгебраические значения из (1.9) в систему (3.5), получаем формулы:

, (3.8)

где степени определяются равенствами (1.9).

**3.3 Примеры решения уравнений 5-й степени определенного класса**

**Пример 1.**

Найти корни уравнения .

**Решение.**

Приведем уравнение к виду . Для этого достаточно умножить все его части на 5:

Дискриминант уравнения , а . Тогда, опираясь на систему (3.7), получаем:

Так, мы получили 3 различных действительных корня уравнения :

, ,

**Пример 2.**

Найти корни уравнения

**Решение.**

Заметим, что данное уравнение можно свести к уравнению вида :

.

Решим его, пользуясь выведенными в работе формулами.

Дискриминант положительный (к тому же, является квадратом числа 121), поэтому, зная, что уравнение имеет 1 действительный и 2 пары комплексно-сопряженных корней и что корни имеют вид (3.5), получаем

Из (3.8):

,

где алгебраические значения взяты из (1.9). Таким образом, решением уравнения является 1 действительный и 2 пары комплексно-сопряженных чисел:

**Пример 3.**

Найти корни уравнения

**Решение.**

Сведём уравнение к виду :

Дискриминант равен , значит корни уравнения вещественные и попарно различные. Последовательно находим и :

Посчитав модуль каждого из комплексных чисел, по формуле Муавра получаем следующие значения для и (1.1):

,

,

Для простоты расчетов выбраны наименее громоздкие значения. В алгебраической форме они выглядят следующим образом:

По формуле (3.6), подставив значения из (1.9), находим каждый из пяти попарно различных корней уравнения:

**Выводы**

При выполнении исследовательской работы была поставлена и достигнута цель вывести формулу корней определенного класса алгебраических уравнений 5-й степени по принципу вывода формулы Кардано.

Задачи, направленные на достижение цели, решены: в работе изучен порядок вывода формулы Кардано для алгебраических уравнений 3-й степени и рассмотрен вид корней в зависимости от знака дискриминанта, а также получена формула типа Кардано для алгебраического уравнения 5-й степени вида с действительными коэффициентами, исследована структура всех корней этого уравнения в зависимости от знака дискриминанта и рассмотрены иллюстрирующие примеры применения выведенной формулы.

Гипотеза, вынесенная в начале работы, оказалась верной: действительно, была выведена формула, подобная формуле Кардано, для выделенного класса уравнений 5-й степени и доказана схожесть структур корней уравнений 3-й и 5-й степени в зависимости от знака дискриминанта.

**Список использованных источников**

1. Алексеев В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях / В. Б. Алексеев. – М.: МЦНМО, 2001. – 112 с.
2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры: учебник для вузов / А. Г. Курош. – 22-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2021 – 123 с.
3. Эйлер Л. О решении уравнений любого порядка (лат. L.Evlero «[De resolutione aequationum cuiusvis gradus](https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1281&context=euler-works)») / Л. Эйлер. – 1764 – 94 с.
4. Тригонометрические константы / Режим доступа: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Тригонометрические\_константы#72°=(2/5)π\_(rad)](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B8%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%82%D1%8B#72°=(2/5)π_(rad)) (дата обращения 12.12.2022)
5. Wolfram MathWorld / Режим доступа: <https://mathworld.wolfram.com/TrigonometryAnglesPi5.html> (дата обращения 12.12.2022)