Муниципальное бюджетное образовательное учреждение
Виткуловская средняя школа.

Исследовательская работа по математике

ФРАКТАЛЫ

Выполнила:
Ученица 10 класса
Бобочкова Дарья Александровна
МБОУ Виткуловская СШ
Руководитель:
Бодров Сергей Борисович
учитель математики
МБОУ Виткуловская СШ

с. Виткулово
2023 год

Оглавление

I. Введение ________________________________ 3

II. Исследовательская часть ________________________________ 5

1.Что такое «фракталы»? ________________________________ 5

2.Предметы исследования ________________________________ 8

3. Нахождение связи между фракталами и треугольником Паскаля ___ 9

4. Нахождение связи между фракталами и золотым сечением _______ 10

5 Нахождение связи между фракталами и многоугольными (фигурными) числами ________________________________ 11

6. Нахождение связи между фракталами и геометрической прогрессией ________________________________ 14

7. Нахождение связи между фракталами и литературными произведениями ________________________________ 15

8 . Нахождение связи между фракталами и правильными многоугольниками ________________________________ 19

9. Мои фракталы ________________________________ 20

III. Заключение ________________________________ 22

1.Список используемой литературы и сайтов Интернета ____________ 24

2.Приложение ________________________________ 25

I. ВВЕДЕНИЕ

Математика вся пронизана красотой и гармонией, только эту красоту надо увидеть. При изучении темы подобия геометрических фигур учитель упомянул о существовании самоподобных фигур, именуемых фракталами. Я заинтересовалась этим понятием и решила подробнее его изучить. Воспользовавшись поиском в интернете, я обнаружила там огромное количество информации о фракталах. Оказывается фракталы стали незаменимыми помощниками астрофизиков, медиков, геологов. Фрактальное моделирование как инструмент для изучения неупорядоченных систем, каковыми являются нефтегазовые месторождения, стало технологической потребностью. Фрактальные модели упрощают анализ движения жидкости или газа, что важно для индустриальных технологий разработки месторождений нефти и газа. Модели, построенные на основе фрактальных изображений, позволяют с большой точностью моделировать космическое пространство и ткани внутренних органов живых организмов. Фрактальная графика может применяться во многих областях естественных наук. Она используется не только в математике, но и в экономике, географии, астрономии, биологии, физике и даже в литературе. Фракталы помогают геофизикам определять форму и характер растрескиваний земной коры и особенности распределения в ее слоях различных химических элементов, а астрономам – моделировать формирование планетных систем и галактик, характер рассеивания лучей и космической пыли.

Красота фракталов далеко не исчерпана и ещё подарит нам немало шедевров – тех, которые услаждают глаз, и тех которые доставляют истинное наслаждение разума. В этом заключается **новизна** работы. **Актуальность** настоящей работы обусловлена, с одной стороны большим интересом к теме «Геометрические фракталы» в современной науке, с другой стороны и ее недостаточной разработанностью.

Теоретическое значение изучения фракталов заключается в том, что избранная для рассмотрения тема фракталов находится на стыке сразу нескольких научных дисциплин. Передо мной возникла **проблема**: как предоставить в доступных формах школьникам тему фракталов, что считаю необходимым для всестороннего развития современного человека.

Гипотеза моего исследования заключается в следующем:
существует связь между фракталами и треугольником Паскаля, золотым сечением, фигурными числами, геометрической прогрессией, литературными произведениями и правильными многогранниками.

Цель исследования: доказать выдвинутую мною гипотезу и ответить на вопрос «Нужно ли и возможно ли изучать фракталы современным школьникам?»

Задачи исследования:

- ❖ Проработать и проанализировать литературу по теме исследования.
- ❖ Рассмотреть различные виды фракталов.
- ❖ Установить взаимосвязи между фракталами и треугольником Паскаля, золотым сечением, фигурными числами, геометрической прогрессией, литературными произведениями и правильными многогранниками.
- ❖ Создать свои фракталы
- ❖ Собрать коллекцию фрактальных образов для ознакомления.

Методы исследования:

- ❖ теоретический (изучение и теоретический анализ и синтез научной и специальной литературы; обобщение опыта);
- ❖ наблюдение, сравнение;
- ❖ практический (составление расчетов, обобщение результатов);
- ❖ экспериментальный метод- моделирование.

II. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ЧАСТЬ

1. Что такое фракталы?

Фрактал (лат. *fractus* — дробленый) — термин, означающий геометрическую фигуру, обладающую свойством самоподобия, то есть составленную из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком.

Сам термин был предложен Бенуа Мандельбротом в 1975 году для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур. Определение фрактала, данное Мандельбротом в книге ‘The Fractal Geometry of Nature’, звучит так: "Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому".

Слово «фрактал» употребляется, когда рассматриваемая фигура, обладает какими-либо из перечисленных ниже свойств:

- ❖ Теоретическая многомерность (можно продолжать в любом количестве измерений).
- ❖ Если рассмотреть небольшой фрагмент регулярной фигуры в очень крупном масштабе, он будет похож на фрагмент прямой. Фрагмент фрактала же в крупном масштабе будет таким же, как и в любом другом

масштабе. Для фрактала увеличение масштаба не ведёт к упрощению структуры, на всех шкалах мы увидим одинаково сложную картину.

- ❖ Является самоподобной или приближённо самоподобной, каждый уровень подобен целому.
- ❖ Длины, площади и объемы одних фракталов равны нулю, других - обращаются в бесконечность.
- ❖ Обладает дробной размерностью.

Алгебраические фракталы – самая крупная группа фракталов. Получают их с помощью нелинейных процессов в n-мерных пространствах.

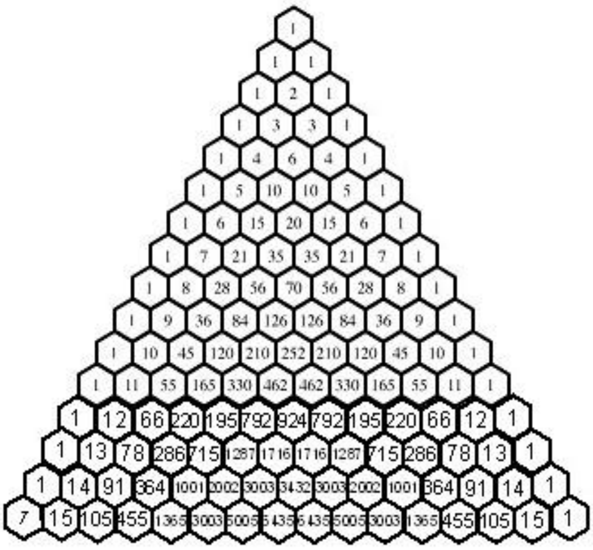
Стохастические фракталы, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д.

Геометрические фракталы. История фракталов началась с геометрических фракталов, которые исследовались математиками в XIX веке. Фракталы этого класса — самые наглядные, потому что в них сразу видна самоподобность. Этот тип фракталов получается путем простых геометрических построений. При построении этих фракталов обычно берется набор отрезков, на основании которых будет строиться фрактал. Далее к этому набору применяют набор правил, который преобразует их в какую-либо геометрическую фигуру.

2. Предметы исследования

1) Треугольник Паскаля

Устройство треугольника Паскаля – боковые стороны единицы, каждое



число равно сумме двух расположенных над ним. Треугольник можно продолжать неограниченно. Треугольник Паскаля служит для вычисления коэффициентов разложения выражений вида $(x+1)^n$. Начав с треугольника из единиц, вычисляют значения на каждом последовательном уровне путём сложения соседних чисел; последней ставят единицу. Таким образом, можно определить, например, что

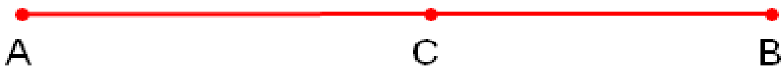
$(x + 1)^4 = 1x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1x^0$.

2) Многоугольные числа.

- ❖ Треугольные числа: (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...)
- ❖ Квадратные числа, полными квадратами: (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,..., n^2, ...)
- ❖ Пятиугольные числа: (1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, ...)
- ❖ Шестиугольные числа (1, 6, 15, 28, 45, ...)

3) Золотое сечение.

Что же такое золотое сечение? Рассмотрим отрезок АВ.

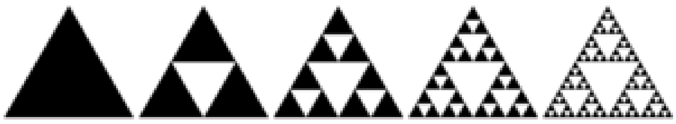


$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}. \quad (1)$$

Точка С производит золотое сечение отрезка АВ, если выполняется пропорция: длина меньшего отрезка так относится к длине большего, как больший отрезок относится к длине всего отрезка. Эту пропорцию принято обозначать греческой буквой φ. Оно равно $\approx 1{,}618$. Из этой пропорции видно, что при золотом сечении длина большего отрезка есть среднее геометрическое длин всего отрезка и его меньшей части. Части золотого сечения составляют приблизительно 62% и 38% всего отрезка. С числом φ связана последовательность целых чисел ***Фибоначчи***: **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...**, часто встречающаяся в природе. Она порождена рекуррентным соотношением $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ с начальными условиями $F_1=F_2=1$. Древнейшим литературным памятником, в котором встречается деление отрезка в отношении золотого сечения, являются «Начала» Евклида. Уже во второй книге «Начал» Евклид строит золотое сечение, а в дальнейшем применяет его для построения некоторых правильных многоугольников и многогранников.

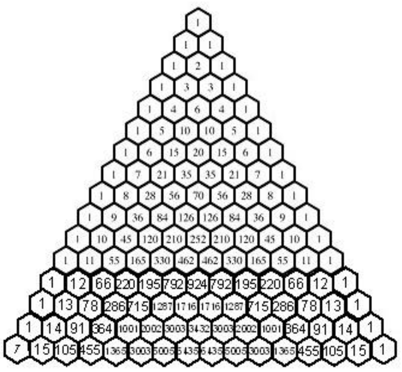
4) Геометрическая прогрессия (изучена на уроках алгебры)

5) Решетка Серпинского

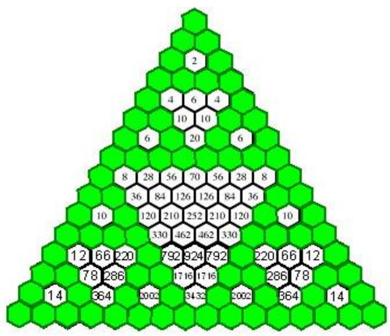


На рисунке изображен треугольник Серпинского – геометрический фрактал, который образуется следующим образом: на первом шаге мы видим обычный треугольник, на следующем шаге соединяются середины сторон, образуя 4 треугольника, один из которых перевернутый. Далее мы повторяем проделанную операцию со всеми треугольниками, кроме перевернутых, и так до бесконечности.

3. Нахождение связи между фракталами и треугольником Паскаля



Треугольник Паскаля



Треугольник Серпинского

При выделении нечетных чисел в треугольнике Паскаля получается треугольник Серпинского. Узор демонстрирует свойство коэффициентов, применяемое при «арифметизации» компьютерных программ, которая преобразует их в алгебраические уравнения.

4. Нахождение связи между фракталами и золотым сечением

Размерность объекта (показатель степени) показывает, по какому закону растет его внутренняя область. Аналогичным образом с ростом размера возрастает «объем фрактала». Ученые пришли к выводу, что фрактал - это множество с дробной размерностью.

Фракталы как математические объекты возникли вследствие потребностей научного познания мира в адекватном теоретическом описании все более сложных природных систем (таких, например, как горный хребет, береговая линия, крона дерева, каскадный водопад, турбулентный поток воздуха в атмосфере и т.п.) и, в конечном счете, в математическом моделировании природы в целом. А золотое сечение, как известно, представляет собой одно из наиболее ярких и устойчивых проявлений гармонии природы. Поэтому вполне возможно выявить взаимосвязь вышеупомянутых объектов, т.е. обнаружить золотое сечение в теории фракталов. Напомним, что золотое сечение определяется выражением $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}6180339...$ и является единственным положительным корнем квадратного уравнения $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

С золотым сечением тесно связаны числа Фибоначчи 1,1,2,3,5,8,13,21,…, каждое из которых представляет собой сумму двух предыдущих. Действительно, величина φ является пределом ряда, составленного из отношений соседних чисел Фибоначчи : $\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{5},\frac{21}{13},...$, а величина φ^2 – пределом ряда, составленного из отношений чисел Фибоначчи, взятых через одно: $\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{5}{2},\frac{8}{3},\frac{13}{5},\frac{21}{8},...$

Фрактал представляет собой геометрический объект с дробной (нецелой) размерностью. Кроме того, фрактал всегда возникает в результате бесконечной последовательности однотипных геометрических операций по его построению, т.е. является следствием предельного перехода, что роднит его с золотым сечением, которое тоже представляет собой предел бесконечного числового ряда. Наконец, размерность фрактала, как правило, является иррациональным числом (как и золотое сечение).

В свете всего вышесказанного отнюдь не удивительным выглядит обнаружение того факта, что размерности многих классических фракталов с той или иной степенью точности могут быть выражены через золотое сечение. Так, например, соотношение для размерности снежинки Кох $d_{СК}$ =1,2618595… можно записать в виде $d_{СК} = 1 + \frac{\varphi^2}{10}$.

Размерности ковра Серпинского $d_{КС}$=1,5849625… тоже можно считать близкими по значению к золотому сечению: $d_{КС} \approx \varphi$. Погрешность этого выражения равна 2%.

Размерность широко применяемого в физических приложениях теории фракталов (например, при исследовании тепловой конвекции) неравномерного (двухмасштабного) множества Кантора (длины образующих отрезков которого – $l_1 = \frac{1}{4}$ и $l_2 = \frac{2}{5}$ – относятся друг к другу как числа Фибоначчи: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{8}{5}$) . Таким образом, **золотое сечение и фракталы взаимосвязаны.**

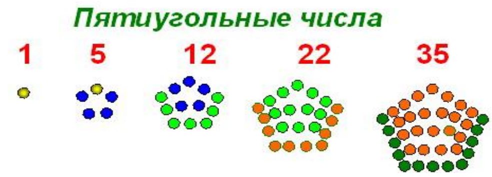
5. Нахождение связи между фракталами и фигурными числами

Рассмотрим каждую группу чисел.

Первое число – 1. Следующее число – 3. Оно получается прибавлением к предыдущему числу, 1, двух точек, чтобы искомая фигура стала треугольником. На третьем шаге мы добавляем три точки, сохраняя фигуру треугольник. На последующих шагах добавляется n точек, где n – порядковый номер треугольного числа. Каждое число получается добавлением к предыдущему определенного количества точек. Из этого свойства получилась рекуррентная формула для треугольных чисел: $t_n=n+t_{n-1}$.

Первое число – 1. Следующее число – 4. Оно получается прибавлением 3 точек к предыдущему числу в виде прямого угла, чтобы получился квадрат. Формула для квадратных чисел очень проста, она выходит из названия этой группы чисел: $g_n = n^2$. Но также, кроме этой формулы, можно вывести рекуррентную формулу для квадратных чисел. Для этого рассмотрим первые пять квадратных чисел:

$$\left.\begin{array}{l} g_1 = 1 \\ g_2 = 4 = 1+3 = 1+2\cdot 2-1 \\ g_3 = 9 = 4+5 = 4+2\cdot 3-1 \\ g_4 = 16 = 9+7 = 9+2\cdot 4-1 \\ g_5 = 25 = 16+9 = 16+2\cdot 5-1 \end{array}\right\} g_n = g_{n-1}+2n-1$$



Первое число – 1. Следующее число – 5. Оно получается прибавлением четырех точек, таким образом, получившаяся фигура принимает форму пятиугольника. Одна сторона такого пятиугольника содержит 2 точки. На следующем шаге на одной стороне будет 3 точки, общее количество точек – 12. Попробуем вывести формулу для вычисления пятиугольных чисел. Первые пять пятиугольных чисел: 1, 5, 12, 22, 35. Они образуются следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = 1 \\ f_2 = 5 = 1+4 = 1+3\cdot 2-2 \\ f_3 = 12 = 5+7 = 5+3\cdot 3-2 \\ f_4 = 22 = 12+10 = 12+3\cdot 4-2 \\ f_5 = 35 = 22+13 = 22+3\cdot 5-2 \end{array}\right\} \mathbf{f_n = f_{n-1}+3n-2}$$

Первое число – 1. Второе – 6. Фигура выглядит как шестиугольник со стороной в 2 точки. На третьем шаге уже 15 точек выстраиваются в виде шестиугольника со стороной 3 точки. Выведем рекуррентную формулу:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 6=1+4\cdot 2-3 \\ u_3 &= 15 = 6+4\cdot 3-3 \\ u_4 &= 28 = 15+4\cdot 4-3 \\ u_5 &= 45 = 28+4\cdot 5-3 \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{u_n = u_{n-1}+4n-3}$$

Если посмотреть внимательнее, то можно заметить связь между всеми рекуррентными формулами.

Для треугольных чисел: $t_n=t_{n-1}+n= t_{n-1}+1n-0$

Для квадратных чисел: $g_n = g_{n-1}+2n-1$

Для пятиугольных чисел: $f_n = f_{n-1}+3n-2$

Для шестиугольных чисел: $u_n = u_{n-1}+4n-3$

Мы видим, что фигурные числа построены на повторяемости: это хорошо видно на рекуррентных формулах. Можно смело утверждать, что **фигурные числа в своей основе имеют фрактальную структуру.**

6. Нахождение связи между фракталами и геометрической прогрессией

1) Если в геометрической прогрессии **$1,2,4,8,16,32,...,2^x,2^{x+1},…$** отбросить первые три члена, то получится последовательность **$8,16,32,...,2^x,2^{x+1},…$** Это тоже геометрическая прогрессия, причем с тем же знаменателем! Более того, она получается из первоначальной прогрессии умножением всех членов на 8. Другими словами она «подобна» первоначальной прогрессии с коэффициентом 8. Ясно, что аналогичный эффект самоподобности остается верным пи отбрасывании любого числа первых членов.

2) К простейшим самоподобным объектам можно отнести и бесконечную в обе стороны геометрическую прогрессию. Например, рассмотрим последовательность целых степеней тройки: **…** $\frac{1}{27}$**,** $\frac{1}{9}$**,** $\frac{1}{3}$**,1,3,9,27,…**

Увеличив каждый член этой прогрессии в3 раза, получим последовательность**: …** $\frac{1}{27}$**,** $\frac{1}{9}$**,** $\frac{1}{3}$**,1,3,9,27,…,**которая оказалась той же самой прогрессией.

3) Применяется геометрическая прогрессия и при решении геометрических задач. Рассмотрим задачу о вложенных квадратах.

На четырех сторонах квадрата $A_1B_1C_1Д_!$ со стороной **a** последовательно взяли по одной точке, каждая из которых делит сторону в отношении 1 : 2. Получили квадрат $A_2B_2C_2Д_2$. С полученным квадратом проделали ту же самую операцию и получили квадрат $A_3B_3C_3Д_3$ и т. д. (рис.1) Найти сумму площадей ,полученной последовательности квадратов.

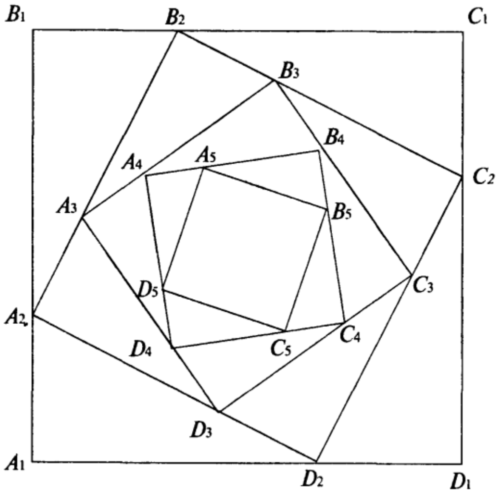


Рис. 1

Решение.

Площадь первого (начального) квадрата $S_1= a^2$

Площадь второго квадрата равна

S₂$=\frac{1}{9}a^2+\frac{4}{9}a^2=\frac{5}{9}a^2$

Следовательно, $\mathbf{S_2}= \frac{5}{9}\mathbf{S_1}$

Аналогично, $S_3=\frac{5}{9}S_2$, т.е.

$$S_3=\left(\frac{5}{9}\right)^2 S_1=\left(\frac{5}{9}\right)^2 a^2; \quad S_4=\frac{5}{9}S_3=\left(\frac{5}{9}\right)^3 a^2 \quad \text{и т.д.:}$$

$$S_n=\left(\frac{5}{9}\right)^2 S_{n-1}=\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} a^2.$$

Таким образом сумма

$$S=S_1+S_2+\ldots+S_n=a^2+\frac{5}{9}a^2+\ldots\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}a^2+\ldots$$

есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом a^2 и знаменателем $\frac{5}{9}$.

Поэтому $S = \frac{a^2}{1-\frac{5}{9}} = \frac{9}{4}a^2$.

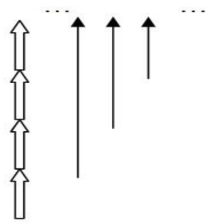
Следовательно, **установлена связь фракталов с геометрической прогрессией.**

7. Нахождение связи между фракталами и литературными произведениями

Рассмотрим фрактал именно как произведение искусства, причем характеризующееся двумя основными характеристиками: 1) часть его неким образом подобна целому (в идеале, эта последовательность подобий распространяется на бесконечность, хотя никто никогда не видел действительно бесконечной последовательности итераций, строящих снежинку Кох); 2) его восприятие происходит по последовательности вложенных уровней. Заметим, что очарование фрактала как раз и возникает на пути следования по этой завораживающей и головокружительной системе уровней, возвращение с которой не гарантировано.

Как же можно создать бесконечный текст? Этим вопросом задавался герой рассказа Х.-Л.Борхеса «Сад расходящихся тропок»: «…я спрашивал себя, как может книга быть бесконечной. В голову не приходит ничего, кроме цикличного, идущего по кругу тома, тома, в котором последняя страница повторяет первую, что и позволяет ему продолжаться сколько угодно».

Посмотрим, какие еще решения могут существовать. Самыми простым бесконечным текстом будет текст из бесконечного количества дублирующихся элементов, или куплетов, повторяющейся частью которого является его «хвост» – тот же текст с любым количеством отброшенных начальных куплетов. Схематически такой текст можно изобразить в виде неразветвляющегося дерева или периодической последовательности повторяющихся куплетов. Единица текста – фраза, строфа или рассказ, начинается, развивается и заканчивается, возвращаясь в исходную точку, точку перехода к следующей единице текста, повторяющей исходную. Такой текст можно уподобить бесконечной периодической дроби: 0,33333…, ее еще можно записать как 0,(3). Видно, что отсечение «головы» – любого количества начальных единиц, ничего не изменит, и «хвост» будет в точности совпадать с целым текстом.



Неразветвляющееся бесконечное дерево тождественно самому себе с любого куплета. Среди таких бесконечных произведений – стихи для детей или народные песенки, как, например, самое короткое: «У попа был двор, на дворе был кол, на колу мочало – не начать ли сказочку сначала?... У попа был двор...»

В отличие от бесконечных куплетов, фрагменты фракталов Мандельброта все же не тождественны, а подобны друг другу, и это качество и придает им завораживающее очарование. Поэтому в изучении литературных фракталов встает задача поиска подобности, сходства (а не тождественности) элементов текста.

В случае бесконечных куплетов замена тождества на подобие была осуществлена различными способами. Можно привести, по крайней мере, две возможности: 1) создание стихов с вариациями, 2) тексты с наращениями.

Стихи с вариациями – это, например, запущенная в оборот С.Никитиным и ставшая народной песенка «У Пегги жил веселый гусь», в которой варьируются Пеггины приживалы и их привычки.

У Пегги жил веселый гусь, Он знал все песни наизусть. Ах, до чего веселый гусь! Спляшем, Пегги, спляшем!	У Пегги жил смешной щенок, Он танцевать под дудку мог. Ах, до чего смешной щенок! Спляшем, Пегги, спляшем!
У Пегги стройный жил жираф, Он элегантен был, как шкаф, Вот это стройный был жираф! Спляшем, Пегги, спляшем! У Пегги жил смешной пингвин, Он различал все марки вин, Ах, до чего смешной пингвин! Спляшем, Пегги, спляшем!	У Пегги жил веселый слон, Он скушал синхрофазотрон, Ну до чего веселый слон, Спляшем, Пегги, спляшем!..

Еще одна возможность кроется в текстах с «приращениями». Таковы известные нам с детства сказки о репке или о колобке, в каждом эпизоде которых количество персонажей увеличивается.

Такие тексты имеют структуру «елочки» или «матрешки», у которых каждый уровень повторяет предыдущий с увеличением размера изображения. Поэтическое произведение, в котором каждый куплет может быть прочитан независимо, как отдельный «этаж» елочки, а также вместе, составляя текст, развивающийся от Одного до Другого, и далее к Природе, Миру и Вселенной, создан Т. Васильевой:

Я.

Я –
За!

Я –
За
Ней.

Я
За
Ней
Хожу.

Я
За
Ней
Хожу
Лесом.

Я
За
Ней
Хожу
Лесом,
Кругом.

Я
За
Ней
Хожу
Лесом.
Кругом
Деревья.

Я
За
Ней
Хожу
Лесом.
Кругом
Деревья
Зеленеют.

Я
За
Ней
Хожу
Лесом.
Кругом
Деревья
Зеленеют,
Красуются.

Я
За
Ней
Хожу
Лесом.
Кругом
Деревья
Зеленеют,
Красуются,
Расцветают.

Я
За
Ней
Хожу
Лесом.
Кругом
Деревья
Зеленеют.
Красуются,
Расцветают
Подснежники.

Я
За
Ней
Хожу
Лесом.
Кругом
Деревья
Зеленеют.
Красуются,
Расцветают
Подснежники
Благоухающие.

Я
За
Ней
Хожу
Лесом.
Кругом
Деревья
Зеленеют.
Красуются,
Расцветают
Подснежники
Благоухающие,
Нежносветящие.

Я
За
Ней
Хожу
Лесом.
Кругом
Деревья
Зеленеют.
Красуются,
Расцветают
Подснежники
Благоухающие,
Нежносветящие,
Розовоперстные.

Я
За
Ней
Хожу
Лесом.
Кругом
Деревья
Зеленеют.
Красуются,
Расцветают
Подснежники
Благоухающие.
Нежносветящие,
Розовоперстные
Златосеребрятся.

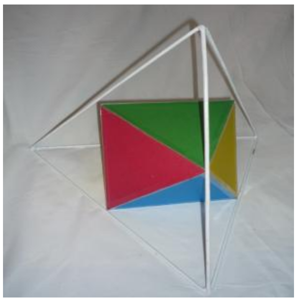
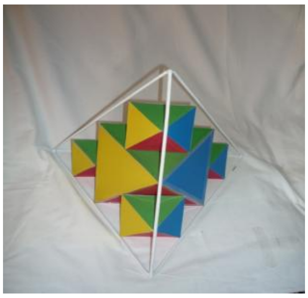
Я
За
Ней
Хожу
Лесом.
Кругом
Деревья
Зеленеют.
Красуются,
Расцветают
Подснежники
Благоухающие.
Нежносветящие,
Розовоперстные,
Златосеребрятся,
Искрорассыпаются.

Я
За
Ней
Хожу
Лесом.
Кругом
Деревья
Зеленеют.
Красуются,
Расцветают
Подснежники
Благоухающие.
Нежносветящие,
Розовоперстные,
Златосеребрятся,
Искрорассыпаются
Солнышкозвездочки.

Теперь, я думаю, можно сделать вывод, что **существуют литературные произведения, обладающие фрактальной структурой.**

8. Нахождение связи между фракталами и правильными многогранниками

Проблема: Как смоделировать фрактальный многогранник, глядя на «Решетку Серпинского»? Возьму правильную треугольную пирамиду (тетраэдр). Вставлю в неё октаэдр, ребро которого в два раза меньше ребра пирамиды. И увижу образовавшихся четыре пирамиды. Вставлю в каждую из них октаэдр, ребро которого также в два раза меньше ребра меньшей пирамиды.

Повторю ещё раз этот приём.

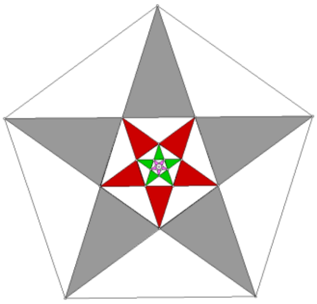
Этот процесс можно продолжить до бесконечности. Таким образом я смоделировала фрактальный многогранник «Пирамиду Серпинского», который обладает свойством самоподобия.

Исследую количество вписанных октаэдров.

Шаги	1	2	3	4	5
Количество октаэдров	1	1+4	1+4+16	1+4+16+64	1+4+16+64+256
Закономерность чисел	4^0	4^0+4^1	$4^0+4^1+4^2$	$4^0+4^1+4^2+4^3$	$4^0+4^1+4^2+4^3+4^4$
Всего октаэдров	1	5	21	85	341

Вывод: смоделировать фрактальный многогранник, глядя на решетку Серпинского можно. И здесь снова имели дело с геометрической прогрессией. Исследуя свойства площади поверхности фрактального многогранника «Пирамиды Серпинского» обнаруживается парадокс. Парадокс: не смотря на то, что фрактальный многогранник «Пирамиды Серпинского» ограничен тетраэдром, площадь его поверхности с увеличением шагов стремится к бесконечности. (смотри приложение 2)

9. Мои фракталы



«Звезда». Мне стало очень интересно попытаться создать свои фракталы с помощью циркуля и линейки, а так же с помощью программ. Я была просто счастлива после выполнения поставленной перед собой цели.

А ещё я создавала программы для фракталов.

Примеры фракталов, созданных в программе Excel

Гиперболические параболоиды.

Пример 1. Для получения фрактала «Гиперболический параболоид» я создала таблицу в Excel при x, y є [-10;10] с шагом 0,1 получила таблицу из 202 строк и 202 столбцов. Использовала формулу:

$$f(x,y) = 2 * A * ((\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} \text{-k*cos}(\frac{x^2+y^2}{m})),\ \text{при } x \in [-10;10],\ y \in [-10;10]$$

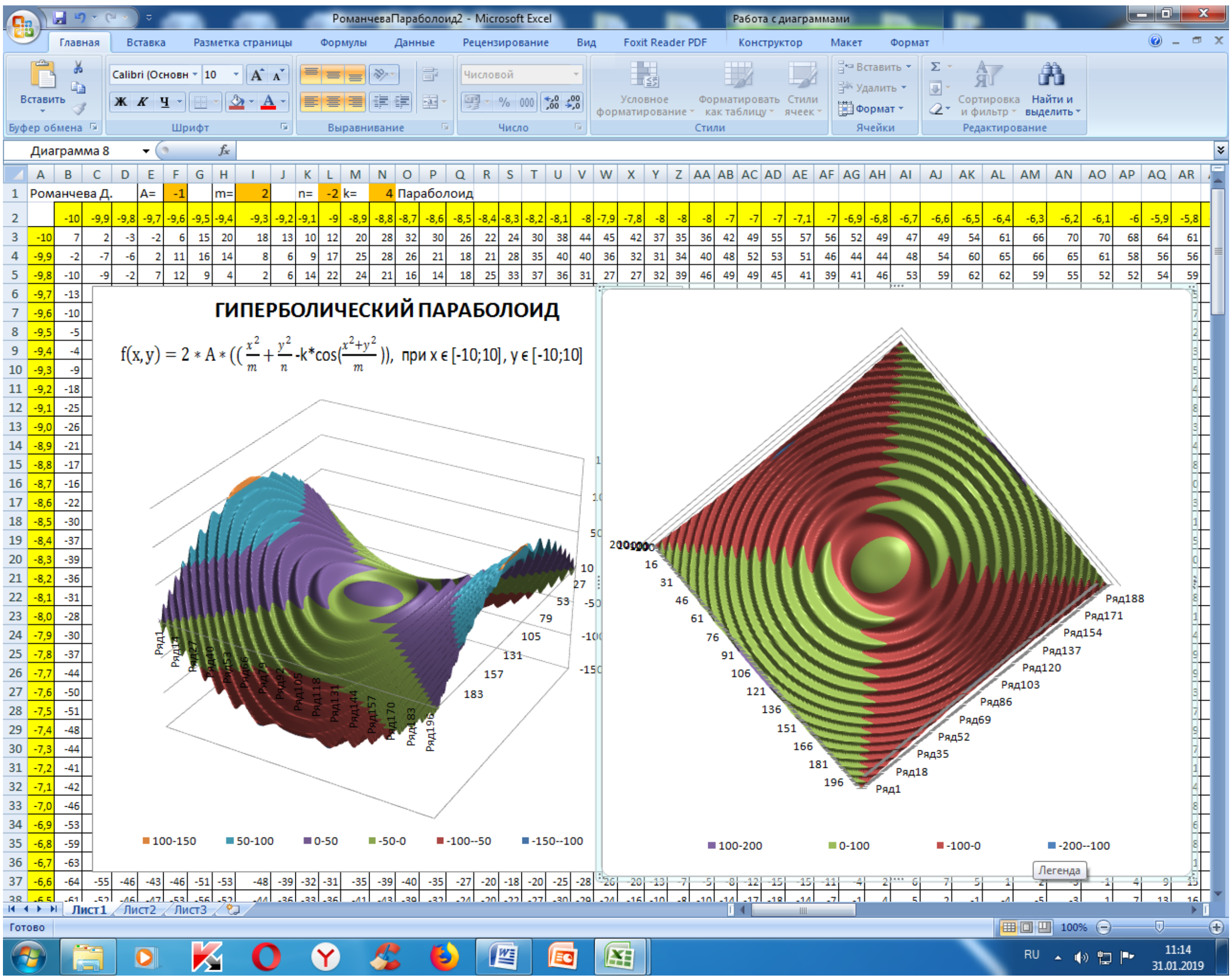
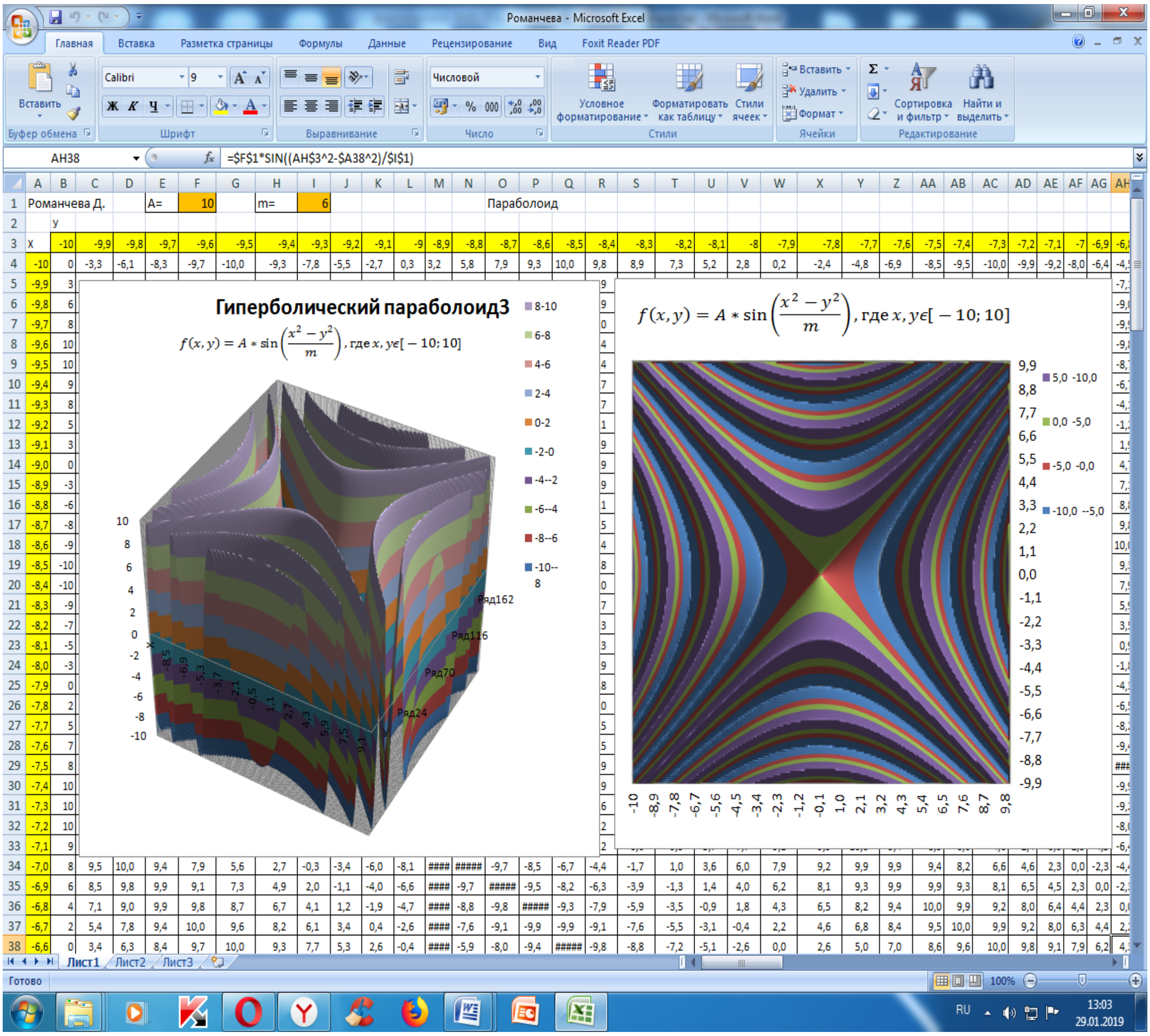
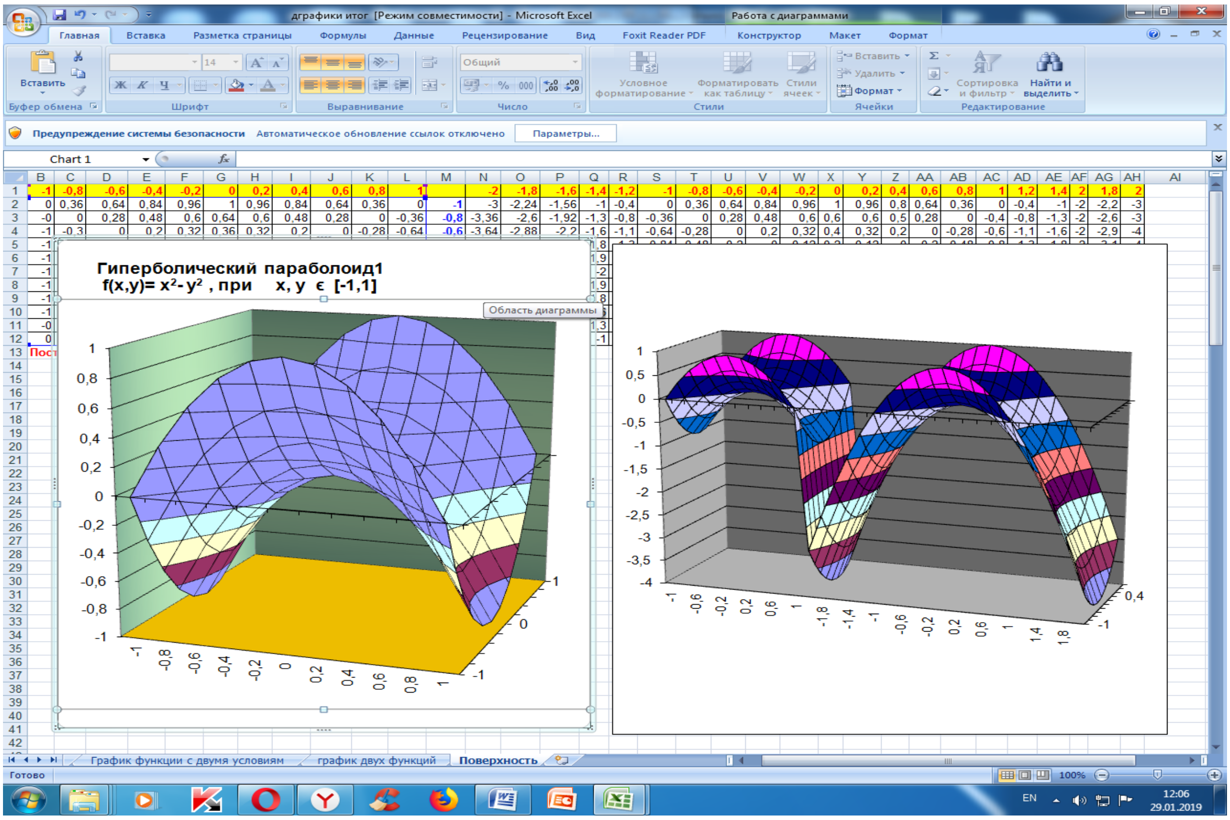
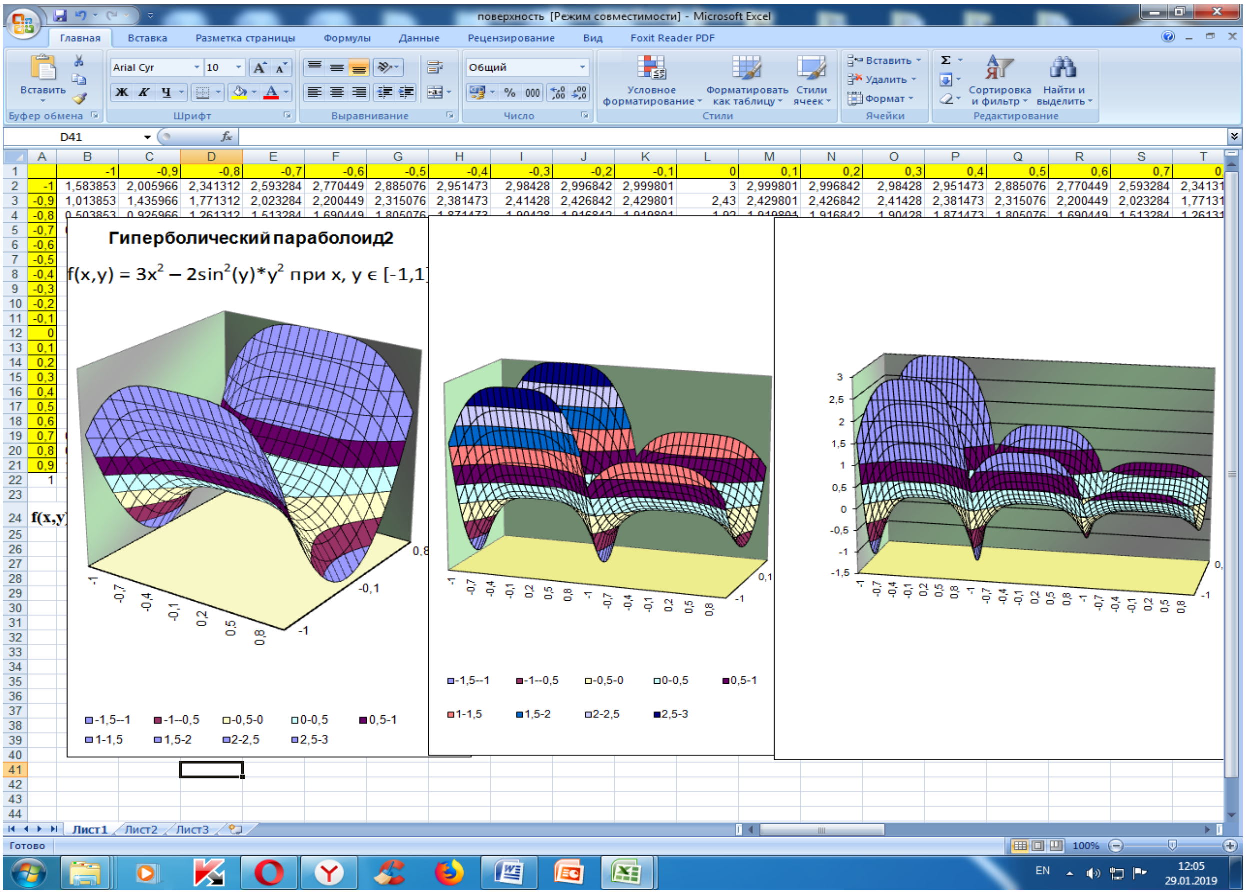


Диаграмма «Поверхность», использовала повороты: по оси x на 120°, по оси y на 30°, перспектива на 15°. Применив другие повороты, получила новый вид.

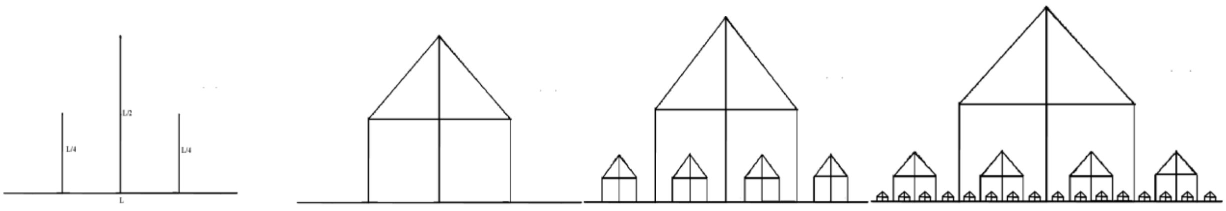
Изменила формулы, и, меняя значения x и y, я получила другие ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ПАРАБОЛОИДЫ:



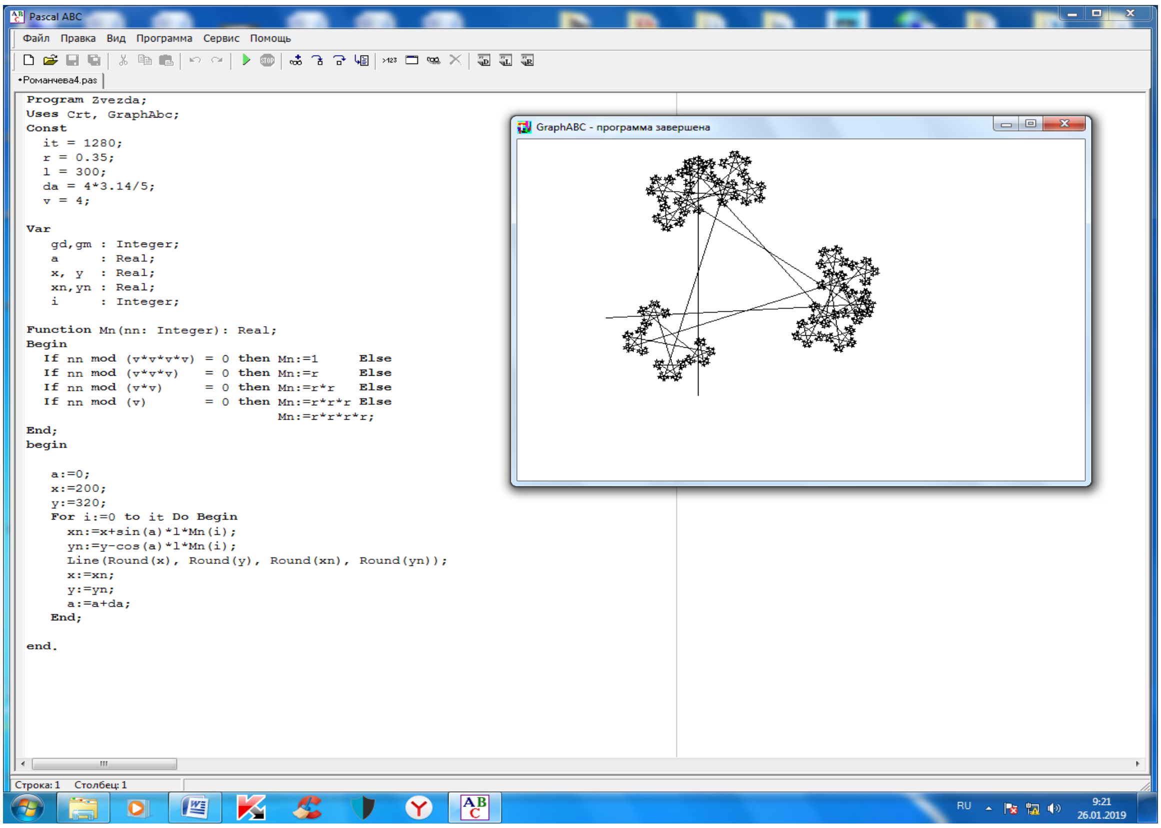

графики итог [Режим совместимости] - Microsoft Excel
Работа с диаграммами
Гиперболический параболоид1
f(x,y)= x²- y² , при x, y ϵ [-1,1]
Область диаграммы
График функции с двумя условиям
график двух функций
Поверхность
Готово


поверхность [Режим совместимости] - Microsoft Excel
Гиперболический параболоид2
f(x,y) = 3x² – 2sin²(y)*y² при x, y ϵ [-1,1]
-1,5--1
-1--0,5
-0,5-0
0-0,5
0,5-1
1-1,5
1,5-2
2-2,5
2,5-3
Лист1
Лист2
Лист3
Готово

Пример фрактала, созданного в программе Microsoft Word: Фрактал «Домик». Берём горизонтальный отрезок длины L. Для создания фрактала первого порядка разделим данный отрезок на четыре части тремя вертикальными отрезками, как показано на первом рисунке, и соединим их верхние точки в треугольник..Для создания фракталов большего порядка будем проделывать эту процедуру над каждым из полученных отрезков и так далее.



Создавать программы на компьютере для меня оказалось очень сложно и я попробовала преобразовать некоторые программы так, чтобы они открылись и изменились в программе PascalABC. И вот что у меня получилось, пример программы « Zvezda» в Pascal:



Другие фракталы в программах PascalABC и Excel см. в Приложении 3.

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В моей работе вы прочитали интересную информацию о фракталах, их видах, размерности и свойствах, а также о треугольнике Паскаля, фигурных числах, золотом сечении, о фрактальных литературных произведениях и многом другом.

В процессе исследования была проделана следующая работа:

1. Проанализирована и проработана литература по теме исследования.
2. Рассмотрены и изучены различные виды фракталов.
3. Установлены взаимосвязи между фракталами и треугольником Паскаля, фигурными числами, золотым сечением, геометрической прогрессией, литературными произведениями, правильными многогранниками, созданы свои фракталы.
4. Собран материал о применении фракталов, собрана коллекция фрактальных образов для первичного ознакомления с миром фракталов (приложение 1)

Установленные связи фракталов с хорошо известным школьным материалом позволяют ответить на поставленный мною вопрос «Нужно ли и возможно ли изучать фракталы современным школьникам?» Ответ: «Да». **Фрактальная наука очень молода, и ей предстоит большое будущее, где еще ей найдется применение. А будущее за нами, сегодняшними школьниками. И изучать фракталы можно уже сейчас в школе на уроках геометрии, алгебры, информатики, факультативных занятиях.** Установленные связи помогут за счет интересных конкретных приложений разнообразить изучение ряда школьных тем, что позволит более прочно усвоить их как в основной, так и в старшей школе. Знакомство с фракталами полезно и для общего развития. А может быть, это даже повлияет на выбор будущей профессии. Материал моей исследовательской работы с интересом уже используется на уроках алгебры, геометрии и информатики в нашей школе (есть справка о внедрении – Приложение 3).

Лично для меня изучение темы фракталов оказалось очень интересной и необычной. В процессе исследования я сама для себя сделала массу новых открытий, связанных с окружающим миром в целом. Я испытываю огромный интерес к этой теме, и поэтому данная работа оказала исключительно положительное влияние на мое представление о современной науке. Я убедилась, что тем, кто занимается фракталами, открывается прекрасный, удивительный мир, в котором царят математика, природа и искусство.

Я планирую продолжить исследование выбранной темы.

1. Список используемой литературы и сайтов Интернета

1. Азевич А.И. Фракталы: геометрия и искусство М.: Мир, 1995.

2.Азевич А.И. Фракталы: геометрия и искусство. Журнал «Математика в школе» № 4.2005 с. 76-80

3. “Большая Энциклопедия Кирилла и Мефодия 2003”/ “Кирилл и Мефодий”, 2003

4. Бондаренко В.А., Дольников В.Л. Фрактальное сжатие изображений // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 5.

5. Вишик М.И. Фрактальная размерность множеств. Соросовский образовательный журнал. № 1, 1998.

6. Волошинов А.В. Математика и искусство – М.: Просвещение, 2000.

7. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы.

8. Мандельброт Б. “Фракталы, случай и финансы”/ Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004

9. Морозов А.Д., Введение в теорию фракталов.

10.Попов К.А. Векторы, фракталы и компьютерное моделирование. Журнал «Математика в школе» № 8.2006 с. 56-61

11. Федер Е. Фракталы. Пер. с англ.-М.: Мир,1991.-254с. (Jens Feder, Plenum Press, NewYork, 1988)

12. Интернет – ресурсы:

http://delphisity.narod.ru/stat1/stat2.html

http://www.photoline.ru/cgi-bin/cr1/photo.pl?ind=1081416586

http://fractal.boom.ru/

http://math.child.ru/otdohni/museum/fractals.html

http://www.enchgallery.com/fractals/fracthumbs.htm

http://i029.radikal.ru/0802/74/bc91570f21b7.jpg

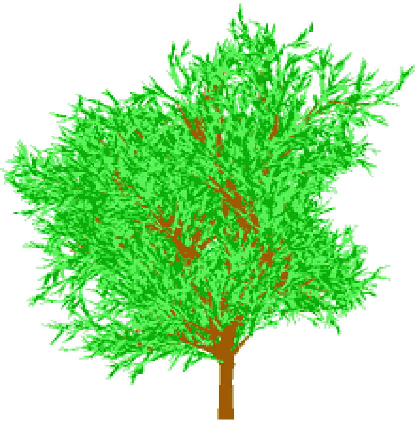
2. Приложение

Приложение 1

Применение фракталов

1. Фракталы в природе

Фракталы находят свое широкое применения буквально везде. Природа довольно часто выражает себя в фрактальных формах. Фракталы с наибольшей очевидностью можно усмотреть в формообразованиях живой природы: ракушки, ветви деревьев, листья и лепестки цветов, ландшафты (морские побережья и русла рек), легкие человека, очертания облаков. Фрактальная геометрия - это изящный и информационно-компактный способ описания сложного. Фракталы открывают простоту сложного. Открытие фракталов произвело революцию не только в геометрии, но и в физике, химии, биологии. Фрактальные алгоритмы нашли применение и в информационных технологиях, например, для синтеза трехмерных компьютерных изображений природных ландшафтов.



Фрактальное дерево

2. Фрактальные антенны

Использование фрактальной геометрии при проектировании антенных устройств было впервые применено американским инженером Натаном Коэном, который тогда жил в центре Бостона, где была запрещена установка на зданиях внешних антенн. Натан вырезал из алюминиевой фольги фигуру в форме кривой Коха и наклеил её на лист бумаги, а затем присоединил к приёмнику. Оказалось, что такая антенна работает не хуже обычной. И хотя физические принципы работы такой антенны не изучены до сих пор, это не помешало Коэну основать собственную компанию и наладить их серийный выпуск.

3 .Сжатие изображений

Существуют алгоритмы для сжатия изображения с помощью фракталов. Они основаны на теореме Банаха о сжимающих преобразованиях (также известной как Collage Theorem) и являются результатом работы исследователя Технологического института шт. Джорджия Майкла Барнсли.

Идея заключается в следующем: предположим, что исходное изображение является неподвижной точкой некоего сжимающего отображения. Тогда можно вместо самого изображения запомнить каким-либо образом это отображение, а для восстановления достаточно многократно применить это отображение к любому стартовому изображению.

По теореме Банаха, такие итерации всегда приводят неподвижной точке, то есть к исходному изображению. На практике вся трудность заключается в отыскании по изображению наиболее подходящего сжимающего отображения и в компактном его хранении. Как правило, алгоритмы поиска отображения (то есть алгоритмы сжатия) в значительной степени переборные и требуют больших вычислительных затрат. В то же время, алгоритмы восстановления достаточно эффективны и быстры.

Вкратце метод, предложенный Барнсли, можно описать следующим образом. Изображение кодируется несколькими простыми преобразованиями (в нашем случае аффинными), т. е. определяется коэффициентами этих преобразований (в нашем случае A, B, C, D, E, F).

Например, изображение кривой Коха можно закодировать 4-мя двумя аффинными преобразованиями, мы однозначно определим его с помощью всего 24-х коэффициентов. Далее, поставив чёрную точку в любой точке картинки мы будем применять наши преобразования в случайном порядке некоторое (достаточно большое) число раз (этот метод ещё называют фрактальный пинг-понг). В результате точка обязательно перейдёт куда-то внутрь чёрной области на исходном изображении. Проделав такую операцию много раз, мы заполним все чёрное пространство, тем самым восстановив картинку.

Несмотря на то, что группой Барнсли было создано программное обеспечение, осталась проблема скорости сжатия. Достаточно эффективное решение не найдено до сих пор, а сам Майкл Барнсли продолжает упорно работать в выбранном направлении.

4. Физика и другие естественные науки

Фракталы стали незаменимыми помощниками астрофизиков, медиков, геологов. Фрактальное моделирование как инструмент для изучения неупорядоченных систем, каковыми являются нефтегазовые месторождения, стало технологической потребностью. Фрактальные модели упрощают анализ движения жидкости или газа, что важно для индустриальных технологий разработки месторождений нефти и газа. Модели, построенные на основе фрактальных изображений, позволяют с большой точностью моделировать космическое пространство и ткани внутренних органов живых организмов.

Изучение турбулентности в потоках очень хорошо подстраивается под фракталы. Турбулентные потоки хаотичны и поэтому их сложно точно смоделировать. И здесь помогает переход к фрактальному представлению, что сильно облегчает работу инженерам и физикам, позволяя им лучше понять динамику сложных потоков.

Также фракталы используются при моделировании пористых материалов, например, в нефтехимии. В биологии они применяются для моделирования популяций и для описания систем внутренних органов (система кровеносных сосудов), в медицине – для моделирования биосенсорных взаимодействий и биения сердца.

В середине века двадцатого, когда весь научный мир увлекался только что появившейся теорией фракталов, известный американский финансист Ральф Эллиот предложил свою теорию поведения цен на акции, которая была основана на использовании теории фракталов. Эллиот исходил из того, что геометрия фракталов имеет место быть не только в живой природе, но и в общественных процессах. К общественным процессам он относил и торговлю акциями на бирже.

Система назначения IP адресов в сети Netsukuku использует принцип фрактального сжатия информации для компактного сохранения информации об узлах сети. Каждый узел сети Netsukuku хранит всего 4 Кб информации о состоянии соседних узлов, при этом любой новый узел подключается к общей сети без необходимости в центральном регулировании раздачи IP адресов, что, например, характерно для сети Интернет. Таким образом, принцип фрактального сжатия информации гарантирует полностью децентрализованную, а следовательно, максимально устойчивую работу всей сети.

5. Фракталы в интерьере

Здесь возможности безграничны. Поскольку фрактальная картина печатается типографским способом, она может быть любого размера, напечатана на любом материале. Все в нашем мире – математика. Поэтому человек инстинктивно тянется к фрактальным картинам. Как ни сложна может быть фрактальная графика, в ней не бывает ничего лишнего, потому что пропорции и цвет выверены при помощи математики с гармонией Земли.

Увидев однажды постер-фрактал, вы его уже никогда не забудете. Множество тонких линий, образующих одно целое, или же необычные элементы, сплетающиеся в единую картину. Вспышки яркого света и умеренные сглаженные линии. Постер-фрактал кажется живым. Он горит, пылает, завлекает, от него невозможно отвести глаз, изучая даже самые крохотные и незначительные детали. Постер-фрактал не только украшает интерьер, но и воздействует на наше настроение. Достаточно лишь выбрать расцветку фрактала, и он будет бодрить или, наоборот, успокаивать, завораживать, или побуждать к действиям. Постер-фрактал - это незабываемая красочность и фантастическая яркость, он оживит дизайн комнаты или рабочего помещения.

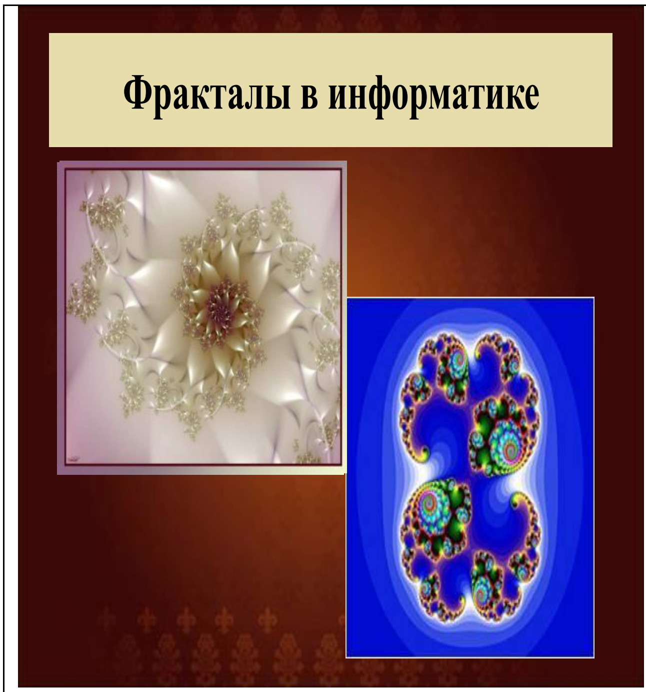
6. Фракталы в архитектуре

Применение фрактальных правил построения широко распространено и в архитектуре. Фрактальная архитектура делится на два типа: искусственно созданная и естественно сложившаяся. В свою очередь, искусственно созданная фрактальная архитектура бывает интуитивной и сознательной. Под интуитивной фрактальностью подразумевается структура многих шедевров мировой архитектуры прошлого, в которых архитектор или строители неосознанно использовали фрактальные принципы. При этом фракталоподобные формы представлены в сооружениях разных эпох и народностей, отражают различные алгоритмы формообразования. Б. Мандельброт первым написал о фрактальности архитектуры, указав для сравнения форму здания Парижской оперы. Это самоподобие форм в архитектуре зданий Исторического музея (Москва); почтамта (Владивосток); индийских храмов (комплекс в Кхаджурахо); фрактальные прообразы и архитектура пирамидальных фасадов (ступенчатые пирамиды), колоколен, фасадов готических зданий Германии. Замок Кастель-дель-Монте, Италия (построен по собственному проекту императором Священной Римской империи Фридрихом II), представляет в плане правильный восьмиугольник, к вершинам которого пристроены восемь башен, также имеющих в плане форму правильных восьмиугольников. Математическая метафора в виде графика функции Вейерштрасса представляется прообразом для силуэта храмов с множеством вертикальных повторяющихся элементов (силуэт Миланского собора). Расположение и размеры куполов многоглавых церквей, условно показанные в одной плоскости плана с осевой симметрией, также имеют прообразом фрактальную структуру (типа «салфетки» Серпинского с кругами). Спиралеподобные формы, отражающие один из распространенных фрактальных алгоритмов в природе, используются и в искусственной среде, включая архитектуру и дизайн (спиральный декор храма Василия Блаженного, металлические узоры оград и решеток, произведения декоративно-прикладного искусства).

Фрактальность (интуитивная) архитектурных форм

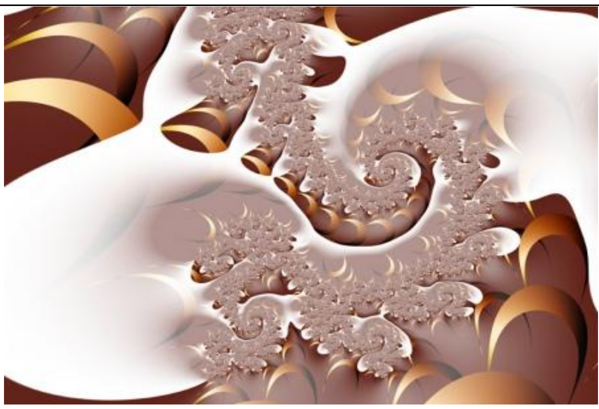
1) Спасская башня, Кремль, Москва;
2) Парижская опера;
3) Собор Василия Блаженного, Москва;
4) Храм в Кхаджурахо, Индия;
5) Собор Саграда Фамилия (Св. Семейства), Фасад Страстей, Барселона (Испания), арх. Антонио Гауди;
6) Мост Тауэр, Лондон;
7) Функция Вейерштрасса;
8) кафедральный собор в Милане;
9) Исторический музей, Москва;
10) Собор Святого Петра, Рим, Ватикан;
11) Мечеть Мухаммада Али в Каирской Цитадели;
12) Замок Кастель-дель-Монте и план замка Италия.


1
2
7
8
3
4
9
10
5
6
11
12


Фракталы в информатике


Фракталы в природе
Многие объекты в природе (например, человеческое тело) состоят из множества фракталов, смешанных друг с другом, причем каждый фрактал имеет свою размерность отличную от размерности остальных. Например, двумерная поверхность человеческой сосудистой системы изгибается, ветвится, скручивается и сжимается так, что ее фрактальная размерность равна 3.0.

Галерея фракталов

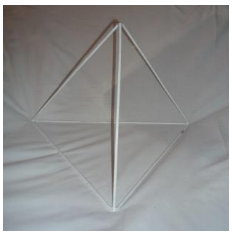
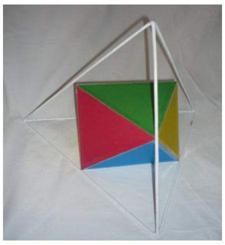
Приложение 2

Исследование свойства площади поверхности фрактального многогранника «Пирамиды Серпинского»

Гипотеза: Будет ли площадь поверхности правильного фрактального многогранника, при увеличении вписанных октаэдров, больше площади поверхности пирамиды-основы фрактального многогранника?

Если ребро первого вписанного в пирамиду октаэдра равно a, то ребро тетраэдра равно $2a$. И площадь поверхности «Пирамиды Серпинского» - основы фрактального многогранника равна:

$$S_{пирамиды} = 4 \cdot S_{треугольника} = 4 \cdot \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = 4a^2\sqrt{3}$$

Площадь поверхности фрактального многогранника. Шаг первый:

$$S_{октаэдра} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$$

Площадь поверхности фрактального многогранника. Шаг второй:

$$S_{многогранника} = 2a^2\sqrt{3} + 4 \cdot (8-2) \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3} + 4 \cdot 6 \cdot \frac{\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}}{4} =$$

$$2a^2\sqrt{3} + \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{2}$$

Площадь поверхности фрактального многогранника. Шаг третий:

$$S_{многогранника} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot (1 \cdot 6 \cdot \frac{\left(\frac{a}{4}\right)^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{\left(\frac{a}{4}\right)^2\sqrt{3}}{4})$$

$$= \frac{7a^2\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot (\frac{6a^2\sqrt{3}}{64} + \frac{12a^2\sqrt{3}}{64}) = \frac{7a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{18a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{37a^2\sqrt{3}}{8}$$

Замечу, что на третьем шаге площадь поверхности фрактального многогранника больше площади поверхности пирамиды – основы фрактального многогранника

«Пирамиды Серпинского». Площадь поверхности фрактального многогранника. Шаг четвёртый:

$$S_{многогранника} = \frac{37a^2\sqrt{3}}{8} + 4\cdot\left(1\cdot 6\cdot\frac{\left(\frac{a}{8}\right)^2\sqrt{3}}{4} + 9\cdot 4\cdot\frac{\left(\frac{a}{8}\right)^2\sqrt{3}}{4} + 6\cdot 2\cdot\frac{\left(\frac{a}{8}\right)^2\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{37a^2\sqrt{3}}{8} + 4\cdot\left(\frac{6a^2\sqrt{3}}{256} + \frac{36a^2\sqrt{3}}{256} + \frac{12a^2\sqrt{3}}{256}\right) = \frac{37a^2\sqrt{3}}{8} + \frac{54a^2\sqrt{3}}{64} =$$ З

$$= \frac{37a^2\sqrt{3}}{8} + \frac{27a^2\sqrt{3}}{32} = \frac{175a^2\sqrt{3}}{32}$$

амечу пошаговое увеличение площади:

Шаг 1	Шаг 2	Шаг 3	Шаг 4	Шаг 5
0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{32}$	?
0	$\frac{3^1}{2^1}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^3}{2^5}$	$\frac{3^4}{2^7}$!

Докажу, что площадь поверхности фрактального многогранника действительно на пятом шаге увеличится на $\frac{3^4}{2^7}a^2\sqrt{3}$.

Площадь поверхности фрактального многогранника. Шаг пятый:

$$S = \frac{175a^2\sqrt{3}}{32} + 4\cdot\left(1\cdot 6\cdot\frac{\left(\frac{a}{16}\right)^2\sqrt{3}}{4} + 21\cdot 4\cdot\frac{\left(\frac{a}{16}\right)^2\sqrt{3}}{4} + 36\cdot 2\cdot\frac{\left(\frac{a}{16}\right)^2\sqrt{3}}{4} + 6\cdot 0\right) =$$

$$= \frac{175a^2\sqrt{3}}{32} + \frac{81a^2\sqrt{3}}{128} = \frac{781a^2\sqrt{3}}{128}$$

Таблица площадей фрактального многогранника в зависимости от шагов.

шаги	1	2	3	4	5
Площадь многогранника	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{7a^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{37a^2\sqrt{3}}{8}$	$\frac{175a^2\sqrt{3}}{32}$	$\frac{781a^2\sqrt{3}}{128}$

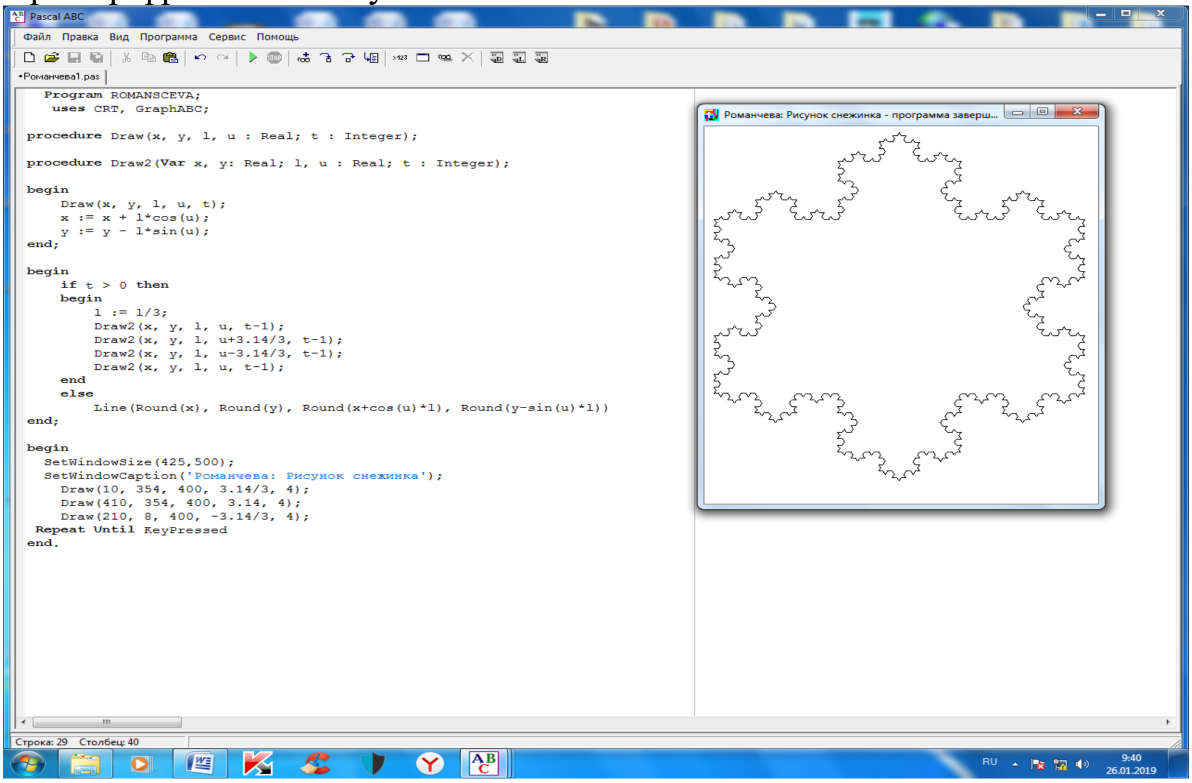
Выведу формулу площади фрактального многогранника. $S_0 = 2a^2\sqrt{3}$,

$S_n = S_{n-1} + \frac{3^n}{2^{2n-1}}\cdot\left(a^2\sqrt{3}\right)$, где $n \in N$ **Парадокс**: не смотря на то, что фрактальный многогранник «Пирамиды Серпинского» ограничен тетраэдром, площадь его поверхности с увеличением шагов стремится к бесконечности.

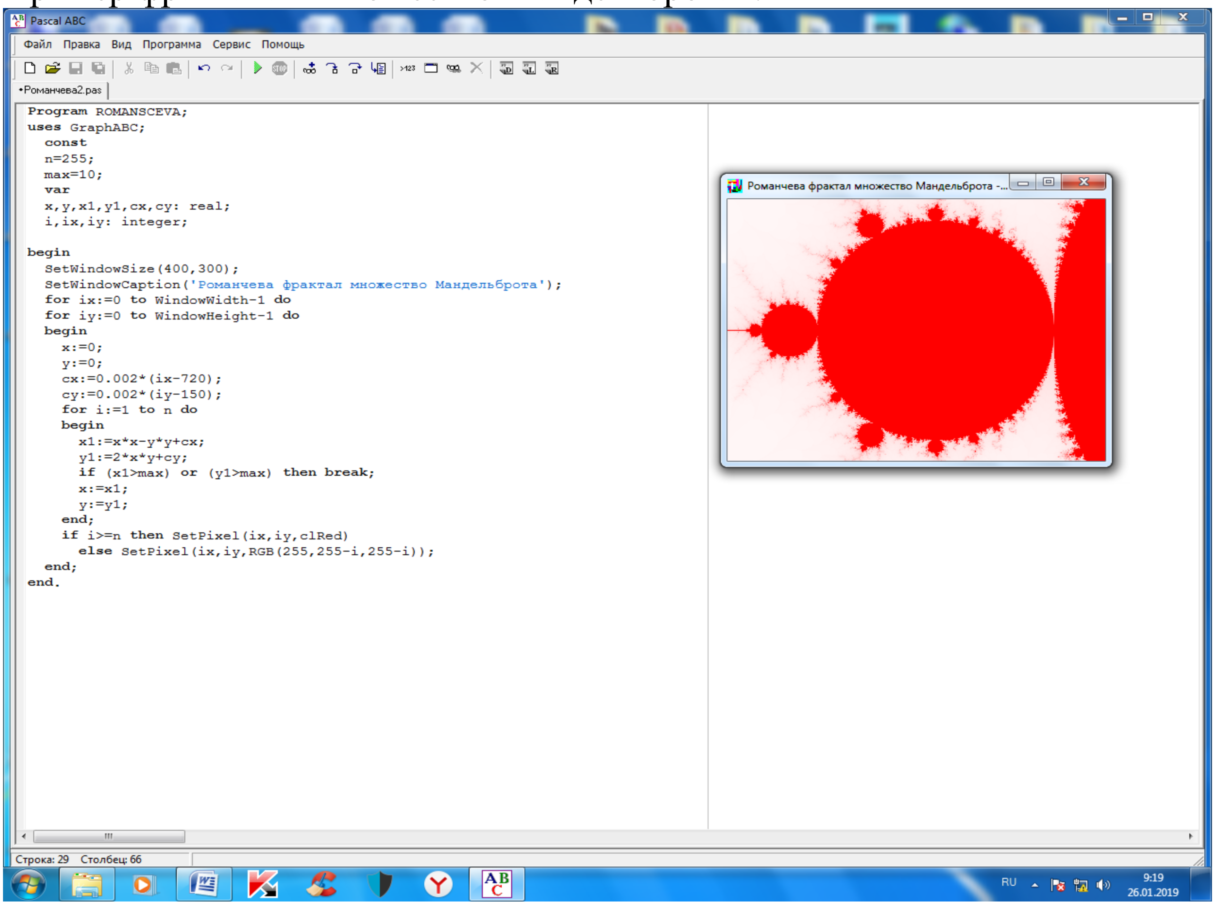
Приложение 3

Скриншоты фракталов в программе PascalABC

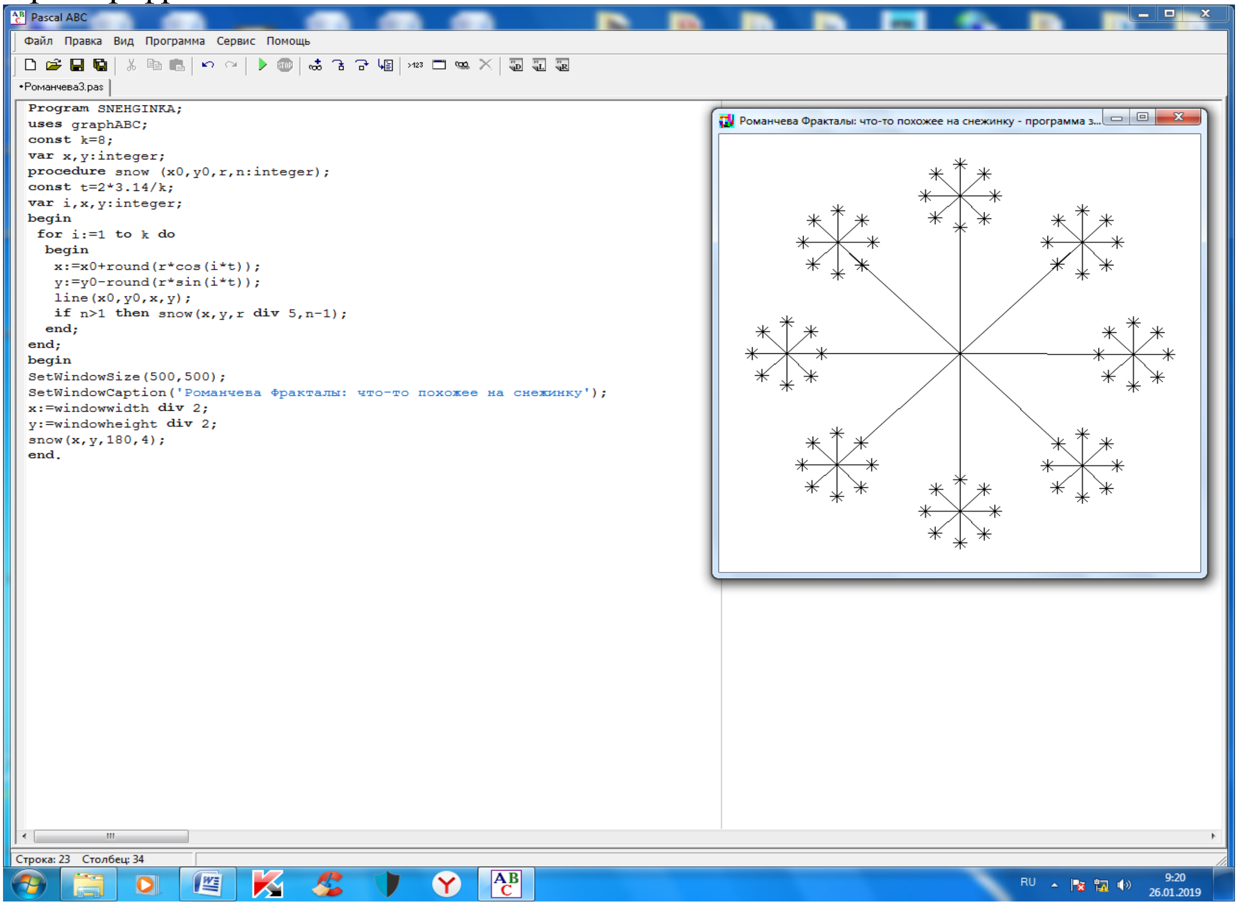
Пример фрактала «Рисунок снежинка»:



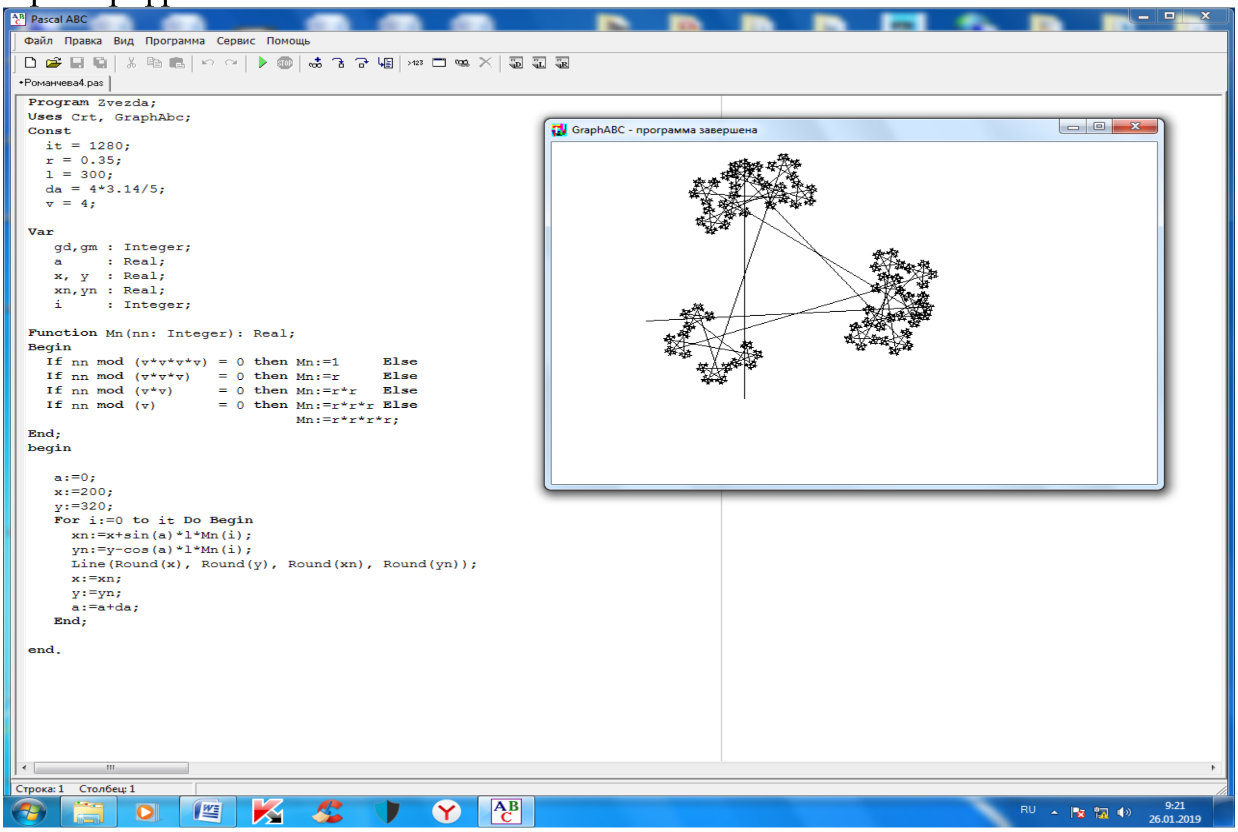
Пример фрактала «Множество Мандельброта»:



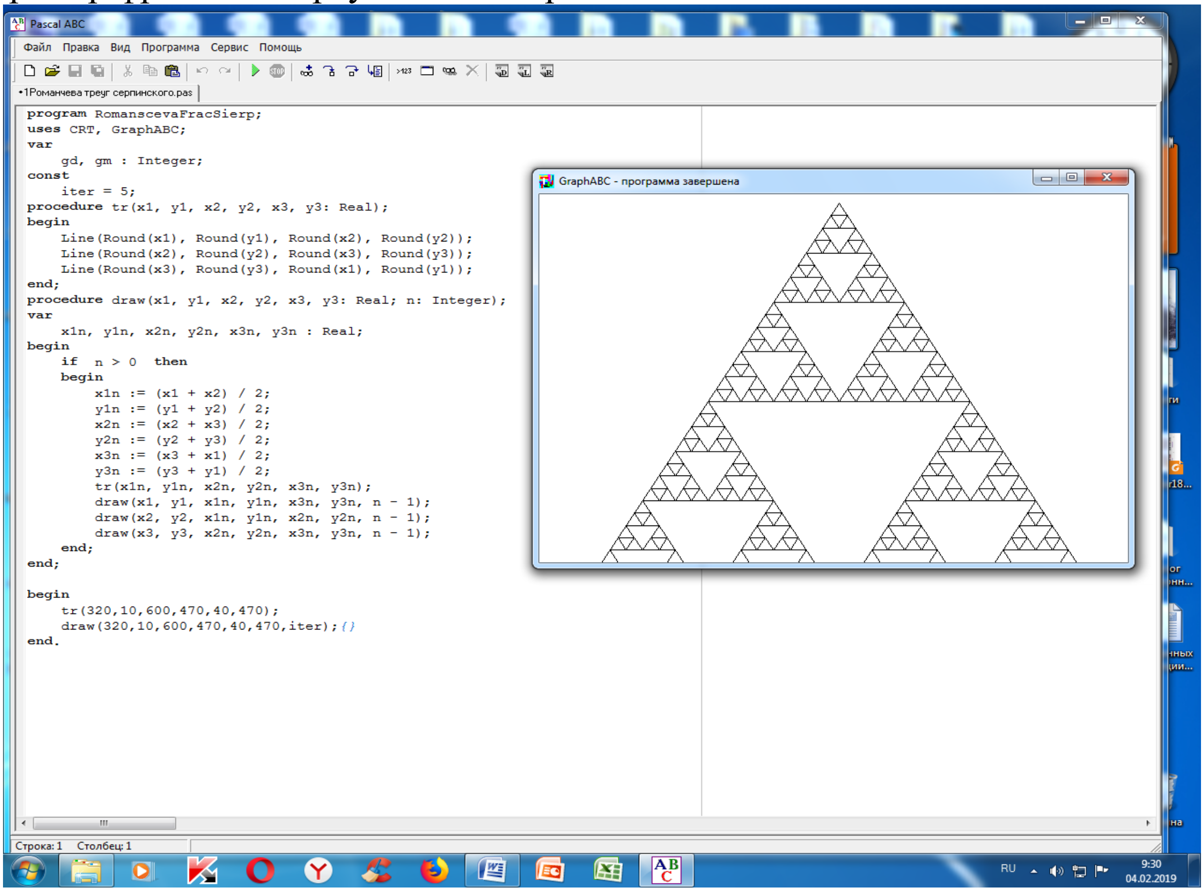
Пример фрактала «SNEHGINKA»:



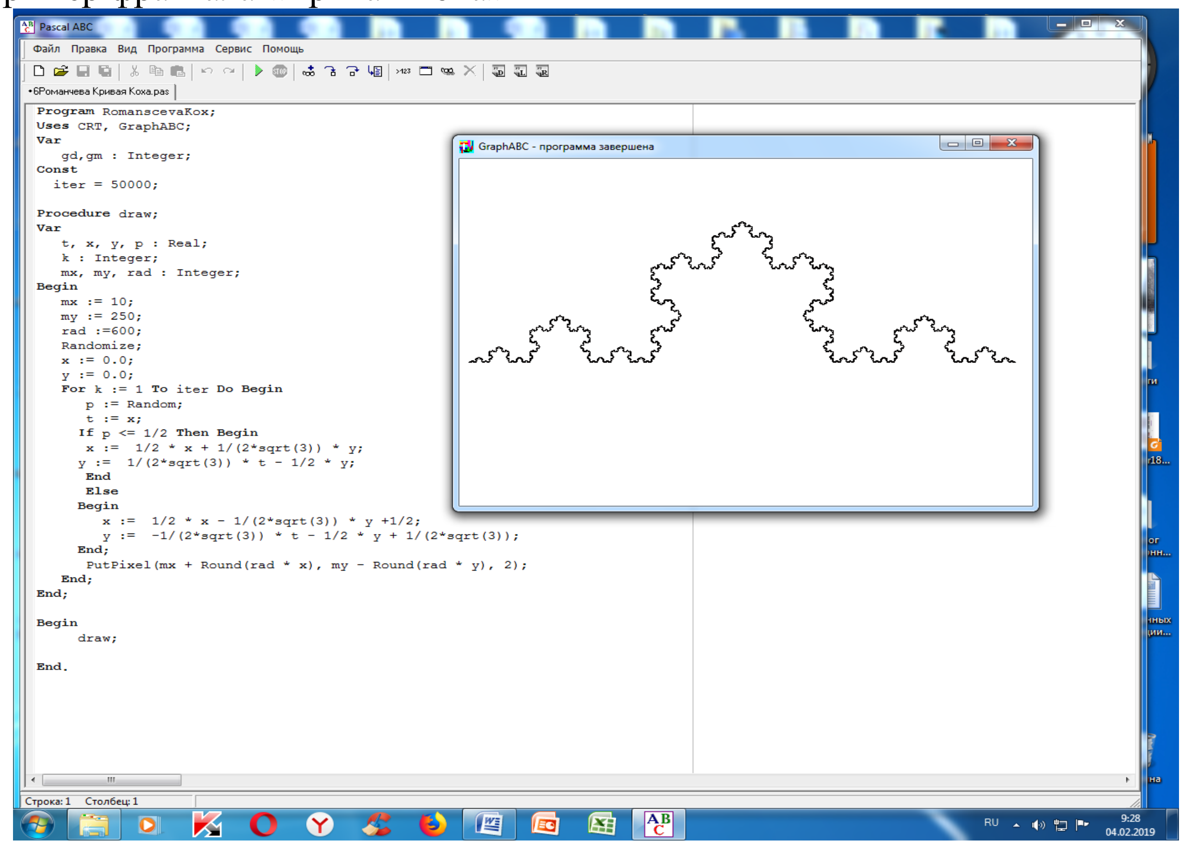
Пример фрактала « Zvezda»:



Пример фрактала «Треугольник Серпинского»



Пример фрактала «Кривая Коха»



Алгебраический фрактал в Excel «Лист папоротника»: